

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS DE MINAS GERAIS

JOSÉ CARREIRA DE OLIVEIRA

***SUBSTÂNCIA E FUNÇÃO* EM ERNST CASSIRER:**  
UMA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS NAS CIÊNCIAS NATURAIS EXATAS

BELO HORIZONTE

2011

**100 Oliveira, José Carneira de**

O48s Substância e função em Ernst Cassirer [manuscrito] : uma construção  
2011 de conceitos nas ciências naturais exatas / José Carneira de Oliveira. -  
2011.

193 f.

Orientadora : Patricia Maria Kauark Leite

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

.

1.Cassirer, Ernest, 1874-1945. 2. Filosofia - Teses 3. Ciência – Filosofia -  
Teses. 4. Lógica - Teses. I.Leite, Patricia Maria Kauark. II. Universidade Federal  
de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título

**JOSÉ CARREIRA DE OLIVEIRA**

*SUBSTÂNCIA E FUNÇÃO* EM ERNST CASSIRER:

UMA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS NAS CIÊNCIAS NATURAIS EX ATAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Filosofia. Área de concentração: Filosofia da ciência e lógica. Orientadora: Professora. Dra. Patrícia Maria Kauark Leite.

BELO HORIZONTE  
2011

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

Universidade Federal de Minas Gerais

Faculdade de Filosofia

Departamento de Filosofia

**José Carreira de Oliveira**

*Substância e Função* em Ernst Cassirer: Uma construção de conceitos nas  
ciências naturais exatas

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da  
Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título  
de Mestre em Filosofia.

Aprovado em \_\_\_\_\_

Banca Examinadora

---

**Profa. Dra. Patrícia Maria Kauark Leite -UFMG**

---

**Prof. Dr. Carlos Roberto Drawin -FAJE**

---

**Prof. Dr. Túlio Roberto Xavier Aguiar -UFMG**

# SUMÁRIO

<b>INTODUÇÃO.....</b>	<b>7</b>
<b>1 CRÍTICA À TEORIA CLÁSSICA DE CONCEITO .....</b>	<b>14</b>
1.1 Introdução.....	14
1.2 Aspectos relevantes da teoria aristotélica do conceito .....	14
1.2.1 Substância e abstração em Aristóteles .....	14
1.2.2 Lógica e metafísica .....	19
1.2.3 Função da doutrina aristotélica do conceito .....	24
1.3 Aspectos relevantes da teoria mentalista moderna.....	26
1.3.1 Aspectos ontológicos e psicológicos do conceito .....	26
1.3.2 Dupla explicação de Mill para conceitos matemáticos .....	28
1.4 Crítica de Cassirer à teoria clássica .....	30
1.4.1 A reforma da lógica.....	30
1.4.2 Conceitos filosóficos e matemáticos .....	33
1.4.3 Aspecto psicológico da abstração aponta o caminho .....	35
1.4.4 Lei que une os elementos: função .....	36
1.4.5 Teorias de conceitos comparadas .....	38
1.4.6 Exemplos: na álgebra e na química.....	40
1.4.7 Objetos de “primeira” e de “segunda ordem” .....	44
<b>2 OS CONCEITOS MATEMÁTICOS COMO FUNÇÕES .....</b>	<b>46</b>
2.1 Introdução.....	46
2.2 O conceito de número.....	50
2.2.1 Fundamentação lógica do conceito de número .....	50
2.2.2 As séries e suas gerações .....	62
2.2.3 A posição de Cassirer sobre o conceito de número .....	66

<b>2.3 Espaço e geometria</b> .....	81
2.3.1 Geometrias. ....	81
2.3.2 A Posição de Cassirer sobre a geometria.....	101
2.3.3 A posição de Cassirer sobre o espaço real.....	107
 <b>3. FUNÇÃO NOS CONCEITOS DE CIÊNCIA NATURAL</b> .....	111
3. 1 Introdução.....	111
3.2 Construção de conceitos na Física .....	114
3.2.1 O ideal da física.....	114
3.2.2 Evolução do conceito de matéria na física.....	135
3.2.3 Espaço, tempo e energia.....	147
 3.3 Construção de conceitos na Química .....	165
3.4 Conceito da ciência natural e “realidade” .....	176
<b>CONCLUSÃO</b> .....	183
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	190

## LISTA DE ABREVIATURAS

OBRAS DE CASSIRER CITADAS:

SF - *Substance and function.*

ETR - *Einstein's theory of relativity.*

EPC - *El problema del conocimiento en la filosofía y en las ciencias modernas.*

DI - *Determinism and Indeterminism in modern physics.*

FFS - *Filosofía de las formas simbólicas.*

AFFS - *A filosofía das formas simbólicas.*

## INTRODUÇÃO

O objetivo do trabalho aqui proposto é apresentar e discutir um dos aspectos importantes do pensamento de Cassirer, onde o autor expõe à luz de mudanças conceituais ocorridas na física e na matemática uma nova abordagem sobre o tema da formação de conceitos.

A filosofia sempre teve uma estreita relação com a ciência, em especial, com a matemática e a física. Houve época em que grande parte dos conhecimentos humanos estava incluída sob o título de filosofia a quem cabia a tarefa de fornecer uma estrutura apriorística do mundo. A ciência, muitas vezes, comparecia nesses registros apenas exercendo um papel secundário e complementar. Quando se constatou falha nessa abordagem, os cientistas passaram a não esperar nada de bom da filosofia. Uma simples menção da palavra “filosofia” era recebida com desdém e ironia (Bunge, 2000, p. 11).

Entretanto, com a revolução científica que culminou no século XVII, houve uma mudança de perspectiva na produção científica alterando a relação entre a filosofia e a ciência. Esses saberes passaram ocupar domínios quase excludentes. Hoje, afortunadamente, uma posição mais saudável está sendo estabelecida entre essas duas áreas do conhecimento humano, mormente nos domínios da Física. Atualmente, cientistas já percebem que a eliminação de hipóteses filosóficas de suas pesquisas é impossível, pois, quando pensam que estão banindo a Filosofia do campo científico, estão apenas substituindo uma hipótese filosófica explícita por uma implícita, e algumas vezes, ingênua ou imatura.

Hoje se reconhece a impossibilidade da existência de uma física autônoma, na qual, todo fenômeno seria explicado até a exaustão. Essa



impossibilidade se aplica de fato a qualquer ciência, na qual, em última instância, algum pressuposto filosófico é sempre admitido. Mesmo adotando-se o materialismo metodológico que reduz os fenômenos a corpos materiais e seus movimentos, como fundamentos científicos menos contaminados filosoficamente, mesmo assim, tal pressuposto não carece de neutralidade filosófica como muitos supõem.

Como Arthur Schopenhauer (1788-1860) nos chama atenção o materialismo metodológico é uma filosofia que, paradoxalmente, pressupõe o Idealismo. Quando um filósofo materialista de forma coerente explica os fenômenos mentais através de uma longa cadeia de argumentos que pressupõem a hipótese do movimento da matéria, perceberá que o ponto de chegada era exatamente o pressuposto inicial de sua pesquisa, pois, quando ele supunha que estava partindo exclusivamente da matéria, na realidade, partia da mente que percebe a matéria (Schopenhauer, 2005, p. 72).

Em contraposição ao materialismo o Idealismo alemão surgiu através de um diálogo crítico com Immanuel Kant (1724-1804). Para os defensores deste Idealismo a crítica kantiana não foi completa. O kantismo mantinha a inda uma série de dualismos tais como: matéria-forma, sensibilidade-entendimento, intuição-conceito e o principal deles; fenômeno-coisa em si, que o invalidavam como Idealismo coerente. Para superar este impasse, a idéia central é considerar a “espontaneidade” do “espírito” que se autoconstrói (Porta, 2004, p. 130). Com essa postura, a ciência não é um conhecimento acabado e completo, mas um processo contínuo que a transcende.

É consenso o fato de que a ciência atual é notoriamente bem sucedida. Em face do seu sucesso, ela impõe uma visão ontologicamente “materialista” do mundo coerente com uma epistemologia do tipo naturalizada. A ciência contemporânea parece bater de frente contra o pressuposto idealista e *a priori* de uma mente que cria a realidade. O movimento de “volta a Kant” (Zurück zu Kant) no interior do qual emerge a filosofia de Cassirer deve ser entendido dentro desse contexto de oposição entre o Materialismo e o Idealismo. O objetivo principal do movimento que se denomina de Neokantismo é, por um lado, reatar os laços com a ciência e, por outro, mostrar que a ciência não elimina o Idealismo, muito pelo contrário; ela sempre o supõe nos seus métodos de descoberta (Porta, 2004, p. 131). O progresso da matemática e da física colocou a filosofia diante de um novo *factum*, e o Neokantismo é uma tentativa de revisão do programa kantiano em face desse novo fato (Porta, 2004, p. 132).

Em *Substance and function*<sup>1</sup>, percorrendo o desenvolvimento histórico do pensamento científico Cassirer defende que a separação entre ciência e filosofia é extremamente danosa. Ele propõe mostrar que se pode fazer jus ao progresso das ciências sem suprimir a tarefa específica da filosofia. Sob este aspecto, uma de suas metas é uma completa e radical desontologização da filosofia. Para Cassirer, a maior fraqueza do sistema kantiano está na consideração das ciências como um fato acabado e completo. É preciso reconhecer que a geometria euclidiana e a física newtoniana não atingiram a “verdade” final como pesava Kant. A história do desenvolvimento de ambos os saberes ensejou a Cassirer

exibir o processo pelo qual este desenvolvimento se efetua. Há por isto, uma premente necessidade de tomar Kant como ponto de partida e, ao mesmo tempo, ultrapassar o kantismo como tal. Quando assim se aborda Kant, Cassirer pretende oferecer uma justificativa transcendental, rejeitando ao mesmo tempo o kantismo estrito e o dogmatismo cientificista presente na *Crítica da razão pura*.

A sua primeira obra sistemática, *Substance and function* insere-se na corrente neokantiana da chamada Escola de Marburgo<sup>2</sup>. O objetivo central dessa escola é a reconciliação da ciência com o idealismo através de uma reformulação do método transcendental. Esse método transfere a reflexão sobre as coisas para o conhecimento delas. O foco principal desse método deixa de ser o objeto da experiência como em Kant e passa a ser a “objetividade” da própria ciência (Porta, 2004, p. 132). Tal método consiste em partir do *factum* da nova ciência e se elevar à condição lógica de possibilidade da mesma. Os princípios assim estabelecidos têm um caráter *a priori*, logo, seu fundamento não pode ser a experiência. Desta forma, o *a priori* é o “ideal” e, portanto, a “idealidade” é o sustentáculo de toda “objetividade”, onde unicamente pode ser formulado o problema do “real”. Este é o objetivo precípuo do Neokantismo: Mostrar que a verdade do conhecimento do “real” supõe o “ideal”, o *a priori* (Porta, 2004, p. 133). Para o neokantismo, o que está em discussão é se a ciência, ao assumir uma posição ontologicamente materialista, refuta ou não o idealismo.

---

<sup>1</sup> Foi usada nessa pesquisa a tradução americana *Substance and function*. Esta tradução, ainda em manuscrito, foi lida e aprovada pelo autor que também escrevia e publicava no idioma inglês.

<sup>2</sup> O neokantismo se divide em três escolas principais, a saber: Marburgo cujos principais representantes são Cohen, Natorp e Cassirer; a de Baden onde se destacam Windelband, Rickert e Lask; e finalmente a chamada de “realista” representada por Riehl.

Os temas epistemológicos abordados pela escola de Marburgo começaram com as reflexões de Hermann Cohen (1842-1918) sobre o cálculo infinitesimal. Para ele, a matemática não é uma teoria sobre certos tipos de objetos, mas, apenas um método com vários instrumentos com os quais se podem objetivar os fenômenos naturais. A física, para ele, é o produto de uma concepção construída e nunca uma mera recepção de dados; assim, há uma linha de continuidade entre a matemática e a física, que é denominada físico-matemática (Cohen, 1977, p. 150). No corpo do presente trabalho, será explicitado como Cassirer em *Substance and function* explora com mestria essas linhas do pensamento de Cohen.

Paul Natorp (1854-1924) é o responsável, no seio da escola, pela introdução da temática da subjetividade. Ele executa essa tarefa preservando o princípio transcendental sem cair nem no psicologismo nem no dualismo metafísico. A dualidade sujeito-objeto torna-se então, subjetivação-objetivação. O seu interesse precípua é a “objetivação”, uma vez que, o sujeito é apenas o outro pólo do processo. Para Natorp, o *factum* da ciência torna-se num fazer-se. O dado a ser refletido no transcendental não é um saber fixo e determinado. Com o cancelamento da intuição ingênua, a ciência torna-se cada vez mais distante da visão cotidiana que se tem do mundo e a continuidade entre a matemática e a física visa transferir a idealidade da primeira para a última (Natorp, 1912, p. 196). Essa posição se mostrará extremamente fecunda na obra de Cassirer, como será explicitado ao longo desta pesquisa.

As mudanças ocorridas na ciência desde os dias de Kant é o que motiva os representantes do neokantismo, entre eles Cassirer, a favor de uma evolução

da posição kantiana. A objetividade da ciência estabelecida por Kant era fundada na **lei**. Para Cassirer, a objetividade da ciência não é mais fundada na lei como em Kant, mas na **teoria**. Toda teoria pressupõe, no entanto um conjunto de “entidades teóricas” que não podem ser eliminadas, e menos ainda, reduzidas a fatos estabelecidos pela observação. As teorias não funcionam sem entidades teóricas e a ciência não avança sem teorias. A ciência lança mão de “símbolos” cuja objetividade não se reduz à existência de objetos exteriores, mas que se justifica dentro, de um sistema físico-matemático da natureza. Isto significa reduzir o real a uma trama bem urdida de relações lógicas. Se por um lado a epistemologia de Kant parte de uma reflexão sobre a mecânica de Newton, a de Cassirer por sua vez tem como ponto de partida uma reflexão sobre o eletromagnetismo de Maxwell. Em obras posteriores Cassirer vai se dedicar à Teoria da Relatividade de Einstein e a Teoria Quântica (ETR e DI). A queda do mecanicismo abriu caminho para uma nova posição da ciência. Para Cassirer, a Física nunca será uma cópia da realidade e muito menos um simples ordenamento da intuição *a priori*.

A visão físico-matemática do mundo não é intuitiva e o objetivo da física não é dar uma imagem (*Bild*) do universo, mas reduzir toda a multiplicidade do sensível a um sistema único de funções.

A presente pesquisa mostrará como Cassirer através do conceito de função matemática pode abordar o fluxo das variações conceituais ocorridas na ciência sem postular uma metafísica baseada no conceito de substância. Na introdução do primeiro capítulo, será exposta a base aristotélica a partir da qual Cassirer faz incidir sua crítica aos conceitos de substância e abstração. Em seguida, será evidenciado, como a supressão do conceito de substância

aristotélica, deixa o campo livre para uma reformulação da lógica e o estabelecimento de uma nova teoria da formação dos conceitos desvinculada da ontologia aristotélica. Também será explicitado como o aspecto lógico-matemático, através do conceito de função, elimina os aspectos negativos da teoria tradicional e termina com uma nova leitura do que seja um universal e um particular.

Na primeira parte do segundo capítulo, será apresentado o conceito de número como o supremo princípio do conhecimento. Na fundamentação da matemática no século dezenove houve uma necessidade de um conceito preciso de número, e isto passou pelas mãos de Frege, Russell e Dedekind. Cassirer fica com a posição desse último que toma a ordinalidade como prioritária sobre a cardinalidade. O conjunto dos números naturais direciona para a abordagem das séries e suas formações tendo a ordem como um invariante.

Será também evidenciado como Cassirer advoga um conhecimento *a priori* inspirado na indução matemática.

Na segunda parte do mesmo capítulo será exposto como a base teórica da geometria aplica-se aos objetos do mundo natural. Aqui, na evolução do conceito de espaço, será constatada a ordem como um invariante. O capítulo tentará expor também como que, na evolução do conceito de espaço, o conceito de substância é substituído pelo conceito de função.

O capítulo final abordará a análise que Cassirer faz do conceito de função na física e na química. Ao longo da história dessas ciências, seus conceitos só se consolidaram em clareza e precisão através do conceito de função. Assim, a análise de Cassirer da construção de conceitos na ciência natural revela ser um antídoto contra o positivismo e o realismo ingênuo adotado pelos cientistas.

## **1 Crítica à teoria clássica de conceito**

### **1.1 Introdução**

Entende-se por teoria clássica do conceito tanto a teoria aristotélica quanto a mentalista adotada por filósofos como Locke, Berkeley e Mill. Inicialmente, serão expostos de forma breve e sucinta os conceitos de substância e abstração nos escritos de Aristóteles e também o liame entre a lógica do Estagirita e sua ontologia. O objetivo deste levantamento, que não pode por motivos óbvios ser exaustivo, mas, será o suficiente para evidenciar o ponto de partida sobre o qual Cassirer vai edificar sua crítica ao conceito clássico de substância. Em seguida, também de forma sucinta, será exposta a solução anti-substancialista dos empiristas modernos. Por último será entendido que, se por um lado a teoria aristotélica é a fonte de muitos equívocos por outro lado as soluções mentalistas não resolvem o problema. Cassirer discorda de Mill totalmente, e, de Berkeley, em parte. O primeiro, por afastar-se do princípio de sua filosofia empirista; e o segundo, por não distinguir a idéia geral de conceito. No final do capítulo tenta se mostrar os primeiros passos do autor por uma teoria que considere a evolução dinâmica dos conceitos científicos.

### **1.2 Aspectos relevantes da teoria aristotélica do conceito**

#### **1.2.1 Substância e abstração em Aristóteles**

O interesse do pensamento grego por substância, em parte, surgiu pela questão levantada pelos filósofos denominados de pré-socráticos na procura da “causa verdadeira” da constituição do mundo. Para Aristóteles, esse conceito se reveste de fundamental importância, pois é o fulcro de sua ontologia. Aristóteles

define a metafísica, ou filosofia das causas primeiras, como a doutrina do “ser enquanto ser” (*Met.*, IV, 1 1003 a 24). O estabelecimento desse ser era exatamente o objeto das pesquisas dos pensadores pré-socráticos, evidentemente, cada um a seu modo. Veja-se o que diz o próprio Aristóteles:

“Se, pois, andavam em busca desses mesmos princípios aqueles filósofos que pesquisaram os elementos das coisas existentes, é necessário que esses sejam elementos essências e não acidentais do ser. Portanto, é do ser enquanto ser que também nós teremos que descobrir as primeiras causas. Em muitos sentidos se pode dizer que uma coisa ‘é’, mas tudo que ‘é’ relaciona a um ponto central, uma espécie definida de ser e não se diz que ‘é’ por simples analogia. Tudo que é ‘salutar’ relaciona-se à saúde, isto no sentido de preservá-la, aquilo no de produzi-la, aquilo outro no de construir um sintoma de saúde ou ainda de comportá-la. E o que é ‘médico’ relaciona com a arte da Medicina, certas coisas são assim chamadas porque a possuem, outras por lhe serem naturalmente afins, e outras ainda por serem uma função da arte médica. E não faltam palavras que, como estas, tenham diversos usos. De modo também são vários os sentidos em que dizemos que uma coisa ‘é’, mas todos eles se referem a um só ponto de partida; algumas coisas ‘são’ pelo o fato de serem substâncias, outras por serem modificações da substância, outras por representarem um trânsito para ela, a destruição, a privação ou uma qualidade dela ou pelo fato de a produzirem ou gerarem, ou por serem termos relativos à substância, ou negações de um desses termos ou da própria substância. É por essa razão que do próprio não-ser dizemos que ‘é’ não-ser (*Met.*, IV, 1 1003 a 30 ; 1003b 10).

Nessa passagem da *Metafísica* nota-se que a *ousia*, isto é, a substância, é o centro que unifica os diversos significados de ser. Em grego, o termo *ousia* está intimamente ligado ao verbo ser, o que não ocorre com o termo substância, que é de origem latina e está ligado ao verbo *substare* que significa literalmente “a permanência debaixo de”. Disso segue que, em Aristóteles, se a substância é excluída, conseqüentemente, se excluem todos os significados de ser. O Estagirita, contudo, não usa a palavra substância em um sentido unívoco. Para ele, substância, analogamente ao ser, também, “se diz de muitas maneiras”. Por isso, há um uso impróprio da palavra. Trata-se, entre outros casos, das



substâncias segundas. Espécie e gênero são por ele denominados de substâncias segundas, mas nenhuma delas coincide com a substância primeira que está além do gênero e da espécie. Em seu tratado sobre as categorias pode-se confirmar esse outro uso da palavra substância.

“Substância, em sua acepção mais próxima e mais estrita, na acepção formal do termo, é aquilo que não é dito de um sujeito nem em um sujeito. A título de exemplos podemos tomar este homem em particular ou este cavalo em particular. Entretanto, realmente nos referimos a substâncias secundárias aquelas dentro das quais - sendo elas espécies - estão incluídas as substâncias primárias ou primeiras e aquelas dentro das quais - sendo estas, gêneros - estão contidas as próprias espécies. Por exemplo, incluímos homem particular na espécie denominada humana e a própria espécie por sua vez é incluída no gênero denominado animal. Estes, a saber, ser humano e animal, de outro modo espécie e gênero, são, por conseguinte substâncias secundárias” (*Cat.*, 5, 2 a 15).

Os diversos significados de ser, para Aristóteles, podem ser ordenados em quatro grupos de significados, a saber: 1) ser, segundo as diferentes categorias; 2) ser, segundo ato e potência; 3) ser, como verdadeiro ou falso e, por fim; 4) ser, como acidente (*Met.*, VI 2 1026 a 30; 1026 b 1-3). Aristóteles diz enfaticamente que o ser pertence às diversas categorias, mas não do mesmo modo e nem em mesmo grau.

“Ou dar-se-á que ‘definição’, como ‘o que uma coisa é’, tenha vários significados? Num sentido, ‘o que uma coisa é’ significa a substância e o ‘isto’; noutro sentido, um ou outro dos predicados: quantidade, qualidade etc. Porquanto, assim com o ‘ser’ pertence a todas as coisas, porém não no mesmo sentido, mas a uma espécie de coisas primariamente a outra de modo secundário, também ‘o que uma coisa é’ pertence em sentido pleno à substância, mas num sentido limitado às outras categorias” (*Met.*, VII, 4 1030 a 20).

Constata-se pelas passagens acima citadas que, o significado do ser está atrelado às categorias e se os significados das demais categorias dependem da primeira, que é a substância, então a busca do significado de ser se reduz à busca do significado de substância. Diante disto, o que se deve entender por substância? Esclarece Aristóteles:

“Ora, em vários sentidos se diz que uma coisa é primeira, e em todos eles o é a substância: (1) na definição, (2) na ordem de conhecimento, (3) no tempo. Com efeito, (3) salvo a substância, nenhuma das demais categorias pode existir independentemente. E (1) também na definição ela é primeira, pois na definição de cada termo deve entrar a da sua substância. Por fim, (2) julgamos ter conhecimento de uma coisa quando sabemos o que ela é, p. ex., o que é o homem ou o fogo, e não quando lhe conhecemos a quantidade, a qualidade, ou o lugar, uma vez que também só conhecemos cada um destes atributos quando sabemos o que é a quantidade ou a qualidade” (*Met.*, VII, 1 1028 a 30-38 ; 1 1028 b 1-4).

Aristóteles denomina também de substâncias os elementos, tais como: terra, água, fogo e ar (*Met.*, V, 8 1017 b 10-25). Em sua doutrina da **matéria**, **forma** e **composto**, Aristóteles, a título diverso, atribui e qualifica de substância ora a forma, ora a matéria, ora o composto (*Met.*, VII, 3 1029 a 1-8). Do exposto, pode-se constatar que, a substância em Aristóteles não é algo simples e linear. Foge ao escopo desse trabalho levantar a razão que levou esse filósofo a aplicar o termo substância (*ousia*) em várias acepções. Cassirer, porém, em sua obra *Substance and function*, sempre usa o termo substância no sentido de forma (*eidos*), ou seja, a natureza essencial das coisas (SF: 7).

O conceito de substância em Aristóteles não pode ser desvinculado da sua doutrina de abstração. Esse termo e seus correspondentes em grego e latim foram sempre usados por filósofos antigos e medievais, mas o presente interesse se volta para o uso que dele fez o Estagirita. Em Aristóteles, tanto o substantivo abstrato como o verbo abstrair passaram a ter um significado mais preciso, pode-se até mesmo dizer, mais “técnico” ou “especializado”. A abstração fica caracterizada na ação ou efeito de separar mentalmente as propriedades das coisas, em si mesmas, não separáveis. Esse processo é uma prerrogativa do intelecto. De início, para Aristóteles, os sentidos também abstraem. Ele faz referência, por exemplo, a um nariz recurvo. Enquanto curvo, não se pode pensá-lo sem carne, porém, em ato, pode-se fazê-lo (*De anima*, III, 431 b 12ss). Em Aristóteles, o processo de abstração está intimamente ligado ao processo de indução. Para ele, se aprende de duas maneiras: pela indução e pela demonstração. A primeira maneira tem como ponto de partida os particulares e nela reside a importância da abstração. Já a segunda maneira parte do s

universais, esse é um processo dedutivo que é dependente do anterior. (*Ana. Post.* , I, 18, 81 a 40 ss). Como aconteceu com a substância, a abstração aristotélica também apresenta dificuldades no estabelecimento das distinções entre os seus vários significados. Embora Aristóteles não tenha escrito um tratado especificamente sobre a abstração pode-se “garimpar” as diferentes nuances deste conceito em alguns de seus escritos. Em *Analíticos posteriores* no Livro I lê-se:

“Entretanto, é impossível ter uma visão dos universais, salvo por meio de indução (visto que mesmo o que chamamos de abstrações só podem ser aprendidas via indução, porque embora não sejam desassociáveis, algumas delas são inerentes a classes particulares de objetos, na medida em que cada classe possui uma natureza definida) – e estamos impossibilitados de utilizar a indução se nos faltar a percepção sensorial, uma vez que é a percepção sensorial que apreende os particulares. É impossível conquistar conhecimento científico de [objetos] particulares, uma vez que nem podem ser apreendidos a partir dos universais sem indução, nem através da indução separadamente da percepção sensorial” (*Ana. Post.* , I, 18 81 b 1-9).

Nessa passagem, o longo parêntese usado pelo autor confirma o processo de abstração como parte fundamental na aquisição de conhecimento. Já no segundo livro do mesmo tratado, onde Aristóteles aborda a maneira pela qual se adquire conhecimentos, ele estabelece que a percepção sensorial dá origem à memória, e esta, por ser múltipla, dá origem à experiência. Esclarece Aristóteles:

“E a experiência, que é universal quando estabelecida como um todo na alma – o singular que corresponde ao múltiplo, a unidade que está identicamente presente em todos os sujeitos particulares – outorga o princípio da arte e da ciência: arte no domínio da criação e ciência no domínio do ser” (*Ana. Post.* , II, 19 100 a 3-10).

Aristóteles afirma que o matemático, para estabelecer o objeto de sua ciência, usa o processo abstrativo e que o filósofo procede da mesma maneira quanto ao **ser**, que é o objeto da ciência por excelência, a metafísica. Aristóteles diz:

“Assim como o matemático se aplica a abstrações (pois antes de iniciar a sua investigação elimina todas as qualidades sensíveis, como o peso e a leveza, a dureza e o seu contrário, o calor e o frio, e as demais contrariedades sensíveis, deixando unicamente o quantitativo e o

contínuo quer em uma, quer em duas, quer em três dimensões, e os seus atributos enquanto quantitativo e contínuo; e, sem os considerar sobre qualquer outro aspecto, examina as posições relativas de alguns desses atributos, as comensurabilidades e incomensurabilidades de outros e as relações de terceiros; e, no entanto, para tudo isto postulamos uma só e a mesma ciência, a Geometria) – pois bem, assim como procede o matemático com relação à quantidade e ao contínuo procedemos nós em relação ao ser” (*Met.*, XI, 3 1061 a 28 ; 1061 b 1-5).

Essa passagem mostra o objeto da metafísica, ou seja, o ser. Porém, a comparação que Aristóteles faz entre o matemático e o filósofo, ele, em um longo parêntese, descreve o processo de abstração que é usado tanto na matemática quanto na filosofia. A eficácia da abstração para adquirir conhecimento como aparece nas passagens citadas anteriormente, especialmente na *Metafísica* (*Met.*, XI, 3 1061 a 28 ; 3 1061 b 1-5) será precisamente o alvo da crítica de Cassirer em *Substance and function*, principal fonte da presente pesquisa. A estreita relação entre o conceito de substância e a doutrina da abstração revela uma articulação intrínseca entre a lógica e a metafísica aristotélica. É o que a seguir se explora.

### 1.2.2 Lógica e metafísica

Aristóteles não incluiu a lógica em sua classificação das ciências. Isto não é casual, pois, para ele, ela não tem em vista a produção de algo e nem tem conteúdo determinado. Ele a considerou como uma propedêutica geral à todas as ciências, tanto as poiéticas, como as teoréticas e, portanto, um vestíbulo à filosofia (*Ana. Post.*, I, 24 a 10 ss). Sendo assim, poderia parecer que, a lógica é apenas usada na argumentação de prova de suas doutrinas, ou seja, ela seria externa ao sistema aristotélico. Entretanto, isto não é verdadeiro, pois, ela está visceralmente ligada à ontologia do Estagirita. Como assinalado na introdução desse capítulo, a lógica aristotélica não está desassociada de sua metafísica. Cassirer afirma: “A lógica aristotélica, em seus princípios gerais, é uma verdadeira expressão e espelho de sua metafísica” (SF: 4).

No uso posterior da lógica aristotélica, sua ontologia pode ter sido esquecida, mas, suas marcas profundas permaneceram. Um exemplo marcante desta união inicial é a formação da própria teoria de conceito. “De fato, a

significação básica que é atribuída à teoria de conceito na estrutura da lógica, aponta para esta conexão” (SF: 4).

Como se referiu acima, um dos significados do ser contemplado nas categorias é o **ser** como verdadeiro ou falso. Em seu breve tratado sobre as categorias Aristóteles diz:

“Cada uma das palavras ou expressões não combinadas significa uma das seguintes coisas: o que (a substância), quão grande, quanto (a quantidade), que tipo de coisa (a qualidade), com o que se relaciona (a relação), onde (o lugar), quando (o tempo), qual a postura (a posição), em quais circunstâncias (o estado ou condição), quão ativo, qual o fazer (a ação), quão passivo, qual o sofrer (a paixão)” (*Cat.* , 4, 1 b 25-27).

Deve-se lembrar que, do ponto de vista metafísico, as categorias representam os diversos significados do **ser**, mas do ponto de vista lógico, elas são os supremos gêneros aos quais devem ser remetidos os termos de uma proposição. Segundo a passagem acima citada, quando se decompõe uma proposição vazada na forma *s é p*, necessariamente cada um de seus termos encaixa-se em uma das categorias. Se os termos da proposição forem considerados isoladamente, nada se pode dizer sobre eles, no que tange ao aspecto lógico, ou seja, se são verdadeiros ou falsos. Veracidade ou falsidade só pode ser atribuída aos juízos que os une na proposição. Aristóteles diz:

“Nenhum desses termos em si mesmo é positivamente assertivo. Afirmações, bem como negações, somente podem surgir quando esses termos são combinados ou unidos. Toda asserção, afirmativa ou negativa, tem que ser verdadeira ou falsa, o que - ao menos isso - está facultado a todos, mas uma palavra ou expressão não combinada (exemplos: ‘homem’, ‘branco’, ‘corre’ ou ‘vence’) não pode ser nem verdadeira nem ser falsa” (*Cat.* , 4, 2 a 4 -10).

Como se percebe, os conteúdos das categorias não contemplam apenas o resultado da decomposição dos termos de uma dada proposição. As categorias representam os aspectos metafísicos e lógicos do ser. Esses dois aspectos perpassam todas as categorias a partir da primeira, que é a substância e, da qual todas as demais dependem. Do exposto, decorre que uma mudança na categoria

substância implica em uma mudança na lógica. Uma estrita ligação entre a ontologia e a lógica aristotélica pode ser claramente percebida através do processo aristotélico de estabelecer definições.

Para que haja uma definição válida é necessário que a essência da coisa definida seja expressa através do “gênero próximo” e da “diferença específica”. Nesse contexto, a definição aristotélica de homem é: “O homem é um animal racional”, onde “animal” é gênero próximo e “racional” uma diferença específica. Uma exposição bem detalhada do que seja definição, segundo Aristóteles, pode-se ler em sua *Metafísica* (*Met.* , VII, 12, 1037 b 24 ss). Com base nesse esquema aristotélico não se pode dizer se uma definição é verdadeira ou falsa, mas apenas, se é válida, ou inválida, caso obedeça ou não as normas acima estabelecidas. Veracidade ou falsidade só se aplica aos juízos e às proposições que os expressam, porque só neles são unidos ou separados os conceitos. Uma segunda maneira de perceber a íntima ligação da lógica com a ontologia é a gênese do princípio do terceiro excluído, que é para Aristóteles, o fundamento do estudo do ser. “Evidentemente, pois, tal princípio é o mais certo de todos; qual seja ele, é o que vamos dizer agora: o mesmo atributo não pode, ao mesmo tempo, pertencer e não pertencer ao mesmo sujeito com relação à mesma coisa; (...)” (*Met.* , IV, 3 1005 b 15-25). A contrapartida dessa “lei do ser” é uma “lei psicológica” que se impede de pensar o mesmo atributo pertencendo e não pertencendo a uma mesma coisa, ao mesmo tempo, e sob as mesmas circunstâncias. O princípio do terceiro excluído é considerado por Aristóteles como o axioma primeiro da lógica. O Estagirita diz: “Eis por que [sic] todos os que empreendem uma demonstração a reduzem a este princípio como axioma primeiro, pois ele é o ponto de partida natural de todos os demais axiomas” (*Met.* , IV, 3 1005 b 30). Percebe-se assim como a ontologia Aristotélica determina sua lógica, sobre a qual se assenta a formação de conceito em sua filosofia. Uma terceira evidência da ligação da lógica aristotélica com sua ontologia é a conhecida questão dos universais, e solução da questão do estatuto dos mesmos. Segundo Jacques Maritain esse é “o primeiro e o mais grave dos problemas filosóficos” (Maritain, 1966, p.106).

Como já se mencionou as pressuposições metafísicas de Aristóteles atreladas por ele à sua lógica, permanecem, mesmo quando não mais subscrevemos sua ontologia (SF: 9). Essa posição é refletida na disputa sobre os universais, entre as posições nominalistas e realistas, tentando estabelecer o estatuto ontológico dos mesmos. A questão, para Cassirer, não pode ser resolvida por nenhuma das facções, pois ambas usam uma lógica “contaminada” pela ontologia aristotélica. As duas facções só estão interessadas no aspecto metafísico dos conceitos, negligenciando completamente o aspecto lógico dos mesmos. Ambos lados admitiam que o conceito é um gênero universal, isto é, um elemento comum abstraído de um dado conjunto de coisas particulares, com uma existência factual separada dessas coisas, mas, apontadas sensorialmente nelas. Sem essa suposição todo conflito deixa de ser inteligível (SF: 9).

O pressuposto sobre o qual Aristóteles fundamentou sua lógica sobreviveu à sua metafísica, por isso, quando se retira da sua lógica o “recheio” ontológico, fica uma brecha enorme entre o “universal” e o “particular”. Como se será mostrado mais a frente, na nova teoria de conceito, universal passa significar a ligação e a ordem dos particulares. O universal será o princípio que estabelece uma série e o particular, um membro dela. Nota-se que, assim entendida a “universalidade”, não permanece mais presa ao significado vago da palavra que a expressa. (SF: 224 e 225).

Conceitos sempre foram usados pelos filósofos, mas nem sempre foram estabelecidos de modo metódico e sistemático. Aristóteles foi o primeiro que teorizou sobre o tema, para ele, o conceito é a expressão mental da essência das coisas. Nessa abordagem se evidencia a existência de dois planos, um ontológico, outro lógico. A essência de uma coisa, enquanto está nela é a sua forma, enquanto está em nossa mente, através do universal, é o seu conceito. Para Aristóteles, o universal não é a **forma**, esta, é bem mais do que a **matéria** e o **composto**, pois, é ela que estrutura a primeira e por consequência o segundo. O próprio filósofo diz: “Por matéria entendo o bronze, por exemplo, por forma o contorno da sua figura, e pela composição dos dois a estátua, o todo concreto.

Portanto, se a forma é anterior a matéria e mais real, será também pela mesma razão, anterior à composição de ambas” ( *Met.* , VII, 3 1029 a 4-7).

Segundo a maioria dos intérpretes de Aristóteles, essa separação que ele fez não reduz a questão à uma abordagem do ser meramente a um plano linguístico, e, por conseguinte, lógico mas; atinge, eminentemente, o plano ontológico. Aristóteles está colocando essência e conceito em planos diferentes. Assim, o estatuto de *ousia-eidos* não pode ser confundido com o estatuto do universal abstrato, que é um gênero. Aristóteles não tematizou explicitamente esses dois planos e suas diferenças, e, em muitos casos, passa inconscientemente de um plano para o outro (Reale, 2001, Vol. I, p. 103 e 104). Segundo J. H. Lessher, considerar o universal com um sentido unívoco é colocar Aristóteles em contradição<sup>3</sup>.

Para Aristóteles, o plano ontológico é prioritário e determina o plano lógico como já foi assinalado, de modo que, uma alteração no primeiro implica uma alteração no segundo.

Foi com essa leitura de Aristóteles em mente que Cassirer, em *Substance and function*<sup>4</sup>, inicia sua pesquisa histórico-sistemática pormenorizando a análise de como são construídos os conceitos nas ciências naturais. Para Cassirer a ligação entre a ontologia aristotélica e sua lógica exige uma reformulação da última quando se abandona a primeira. Com esses preliminares, pode-se adentrar na formação de conceito em Aristóteles e mostrar porque esta formação hoje, segundo Cassirer, não pode ser mais aceita.

---

<sup>3</sup> Segundo J. H. Lessher em *Metafísica* ( *Met.* , VII, 13) Aristóteles estabelece uma inconsistência quando relaciona universal com *ousia*. A tese é: 1) Nenhum universal é *ousia*. 2) A forma é *ousia*. 3) A forma é universal. Para Lucas Angioni, a única saída dessa inconsistência é considerar a mudança de sentido de “universal” nas afirmativas 1 e 3 (Angioni, 2008, p. 84 -89).



### 1.2.3 Função da doutrina aristotélica do conceito

Em Aristóteles, o conceito não representa apenas a característica comum de um grupo de coisas, e sim, sua forma, o *eidos* delas (Veja nota 3). Aristóteles desenvolveu a idéia de que são nessas formas que a realidade se distribui e o que surge, metafisicamente falando, é o conceito que a mente produz com base na abstração das percepções. Se sua doutrina restringisse apenas à lógica e à linguagem, o conceito seria apenas um esquema desprovido de qualquer atributo teleológico ou causal das coisas. Seu ponto de partida era a linguagem, mas sua meta era a substância, ou seja, uma essência necessária. Como assinalado anteriormente, Aristóteles transita inconscientemente entre o plano lógico e o metafísico em suas categorias. As espécies biológicas são um exemplo claro desse trânsito, pois, por um lado, nelas, ele contempla a finalidade e a força imanente que desenvolve o individuo vivo, e por outro, sua classificação lógica dentro das espécies. Os conceitos e as definições são gerados dentro desse quadro. Agora, se considerada a lógica aristotélica desvinculada de sua ontologia, será percebido que ela apresenta lacunas. Esses vazios não são de início claramente vistos, porque foram automaticamente preenchidos pela ontologia aristotélica. Para Aristóteles, há o campo lógico e o metafísico, e a função da doutrina do conceito, segundo Cassirer, é uni-los (SF: 7). Cassirer infere essa união em Aristóteles: “A seleção do que é comum permanece um jogo vazio de idéias se não é assumido que, o que é assim gan hado é, ao mesmo tempo, a real *Forma* que garante a conexão causal e teleológica das coisas particulares” (SF: 7).

Para Aristóteles, o conceito é um “universal” que define a natureza de uma coisa, a saber, sua essência ou sua substância ( *ousia* ). Prossegue Cassirer:

“A determinação do conceito de acordo com o seu gênero superior imediato e sua específica diferença reproduz o processo pelo qual a real substância essencialmente revela a si mesma em sua particular forma de ser. Assim é esta concepção básica de substância que as teorias puramente lógicas de Aristóteles fazem referência. O sistema completo

---

<sup>4</sup> As obras de Cassirer identificadas pelas abreviaturas: SF, ETR e DI o original está em inglês e as identificadas pelas abreviaturas: EPC e FFS o original está em espanhol e AFFS, em português.

de definições científicas seria também uma completa expressão das forças substanciais que controlam a realidade (SF: 7 e 8).

O conhecimento na lógica aristotélica está condicionado ao entendimento do **ser**. Suas categorias são concebidas para abrigar as diversas divisões dos seres. Aristóteles destingiu expressamente a existência do ser estabelecido em uma síntese conceitual da existência de algo concreto, ou seja, uma coisa. Em *Da interpretação* (I, 16 a 12-18 e III, 16 b 19-25) ele fez uma distinção nítida entre: significar algo e significar a existência de algo. É interessante notar que, Aristóteles nunca formula, no estabelecimento do processo de formação de conceito, qualquer questionamento sobre primazia da categoria substância. Este conceito é apenas postulado como se fosse um substrato fixo para receber todas as variações lógicas e gramaticais do ser em geral. Sobre as categorias aristotélicas Cassirer comenta:

“Quantidade e qualidade, determinações de espaço e tempo não existem em si e neles mesmos, mas meramente como propriedade de realidades absolutas que existem por si mesmas. A categoria de relação especialmente é forçada a uma posição subordinada e dependente desta doutrina metafísica e fundamental em Aristóteles” (SF: 8).

A categoria relação é dependente do ser real e é considerada a uma adição que, na realidade, não afeta o ser real. Cassirer chama atenção especialmente para esta categoria, pois ela, fora do esquema categorial de Aristóteles, assume uma posição fundamental na teoria cassireriana do conhecimento. A relação entre uma coisa e suas propriedades é, a partir de então, o norte desse novo ponto de vista. Relação deixa de ser uma mera mediação entre as propriedades de um sujeito.

A pesar de toda transformação sofrida pela teoria aristotélica da formação de conceitos, ao longo do tempo, os traços que a ligam à sua ontologia, ainda permanecem. E Cassirer conclui:

“Aqui aparece uma distinção metodológica de grande significação. As duas principais formas de lógica que estão em especial oposição uma a outra no desenvolvimento científico moderno são distinguidas – como se

tornará claro – pelos diferentes valores que são colocados sobre os *conceitos coisa* e os *conceitos relação*” (SF: p. 8 e 9).

O conceito de coisa subentende o conceito de substância, e o conceito de relação aponta para o conceito de função. No desenvolvimento da presente pesquisa esses dois aspectos tornar-se-ão cada vez mais evidentes. Antes, porém, deve-se considerar a teoria mentalista moderna sobre a formação de conceitos.

### **1.3 Aspectos relevantes da teoria mentalista moderna**

#### **1.3.1 Aspectos ontológicos e psicológicos do conceito**

A teoria da abstração e formação dos conceitos na modernidade sofre uma inflexão radical em direção ao sujeito. Em sua obra *Ensaio acerca do entendimento humano*, John Locke (1632-1704) tem o objetivo de explicar como surge o nosso conhecimento; para explicar o processo de formação dos conceitos ele enfatiza mais o plano psicológico do que o ontológico. Para ele, não existe “idéia inata”, a mente é uma *tabula rasa* e todo o nosso conhecimento, em última instância, é derivado da experiência (Locke, 1988, p. 27). O elemento primordial escolhido no processo de abstração, deixa de vir do objeto externo, situando-se no seu correspondente na mente. Entretanto, em relação a tradicional doutrina aristotélica há apenas uma substituição de objetos externos por suas imagens mentais, e isso, não leva à solução do problema. Os conceitos genéricos pretendem atingir o núcleo das coisas reais, mas, Cassirer salienta que sua eficácia é apenas aparente.

“O conceito não *existe*, exceto como parte de uma apresentação concreta aliviada de todos os atributos da representação. O que lhe dá a aparência de valor independente, e caráter psicológico original é meramente a circunstância que nossa atenção, sendo limitada em seu poder, nunca é capaz de iluminar o todo da representação e tem necessidade de limitá-la à mera seleção de partes” (SF: 10).

Embora a explicação “psicológica de abstração” não resolva a questão, ela é útil para indicar o caminho que leva à significação lógica de qualquer conceito. Ela mostra a capacidade da mente de reproduzir representações de

objeto independente de sua presença física. Nessas reproduções de objetos, e reproduções de reproduções, os elementos diferentes tendem a desaparecerem, e, os semelhantes, a se acentuarem. Na percepção, os elementos comuns das coisas são marcados em nossa mente. Em função de repetidas percepções, traços característicos aparecem de novo em nossa mente, agora sem a presença do objeto. Cassirer afirma:

“A progressiva solidificação destas características concordantes, sua fusão em um todo indivisível e unitário, constitui a natureza psicológica do conceito, que está, conseqüentemente, na origem, em função de uma mera totalidade de resíduos memoriais que têm sido deixados em nós por percepções de coisas e processos reais” (SF: 11).

Diante desse processo, o conceito passa a ser apenas um resíduo mental de elementos concordantes acumulados, tendo como pano de fundo uma “sombra” de diferenças esquecidas. Os elementos concordantes são agora considerados como o núcleo substancial da coisa, e não há diferença significativa entre a concepção de conceito do ponto de vista ontológico e psicológico. É o que afirma Cassirer: “As diferenças entre as posições ontológicas e as psicológicas são meramente que, as ‘coisas’ do escolasticismo eram seres copiados no pensamento, enquanto aqui [versão psicológica do conceito] os objetos significam nada mais que conteúdos da percepção” (SF: 11). Do ponto de vista metafísico, ainda que ambas posições sejam diferentes, o aspecto lógico da questão é o mesmo.

Cassirer ressalta que a crítica de George Berkeley (1685-1753) à teoria da abstração de Locke não resolve também o problema.

Referindo-se à teoria de conceitos abstratos Berkeley afirma que, são os próprios filósofos os causadores das dificuldades suscitadas pelo tema, pois, levantam a poeira, e depois se queixam de não enxergar (Berkeley, 2005, p.10).

Para Berkeley, quando, nos processos abstrativos são abandonados os dados sensíveis, só se produzem deturpações nos objetos. A idéia geral abstrata é base de todo engano e erro. O conceito fundamentado nas idéias gerais abstratas não atinge a essência das coisas, por isso, em vez de aguçar a mente do

pensador, a embota. As idéias gerais, para Berkeley, são “ficções e artifícios do espírito”. Ele questiona o fato da idéia geral abstrata de triângulo designar todos os tipos de triângulos e, ao mesmo tempo, nenhum deles, (Berkeley, 2005, p.16). Cassirer, no entanto considera que faltou a Berkeley considerar a distinção entre conceito, e idéia geral abstrata. A crítica de Berkeley atingiria somente a idéia geral abstrata e não o conceito. Cassirer comenta o famoso exemplo do “conceito” de triângulo:

“A idéia ‘geral’ do triângulo, isto é, a imagem de um triângulo que não é nem retângulo [sic]<sup>5</sup>, nem isósceles, nem escaleno, porém, ao mesmo tempo tem que ser todos eles, é mera ficção. Contudo ao recusar esta ficção, contra sua própria intenção, Berkeley prepara o terreno para outra concepção mais profunda de conceito, já que, ainda que combata a representação geral, deixa incólume a generalidade da função representativa” (FFS: 341).

No conceito de triângulo, seus elementos devem ser considerados como variáveis de uma função. Ela é a regra unitária de transformação de onde são derivados todos os casos particulares (FFS: 342). Em sua crítica psicológica, Berkeley enfatiza a contradição da imagem, não da regra (Berkeley, 2005, p.17). Nesse sentido, Cassirer salienta que, mesmo no desenvolvimento da teoria moderna de conceito, ainda não se atinou com o fato de que os conceitos científicos, na física e na matemática, possam ter outros propósitos do que aqueles concedidos na velha escolástica (SF: 9).

### **1.3.2 Dupla explicação de Mill para conceitos matemáticos**

John Stuart Mill (1806-1873) para ser fiel à manutenção da experiência como princípio supremo de sua filosofia, quer fundamentar verdades matemáticas em fatos empíricos. É como se a proposição  $1+2=3$  apenas descrevesse um processo experimental que força alguém ver três coisas como o resultado do ajuntamento de duas, com uma outra. Segundo Mill, esse processo seria válido também para as relações espaciais, pois, um “quadrado-redondo” é um conceito contraditório somente porque nunca se tem a experiência da “redondeza” de um

---

<sup>5</sup> Para coerência do raciocínio em lugar de “retângulo” deveria constar equilátero nessa passagem.

objeto permanecer simultaneamente com os seus quatro “cantos”. O aparecimento da impressão de “redondeza” só surge quando desaparece a impressão dos quatro “cantos”. Assim o conteúdo, tanto da aritmética, quanto da geometria, seria visto como afirmativas sobre as representações das coisas do mundo natural.

Segundo Cassirer, Mill explica o significado da experiência de numerar e medir, apoiando-se na precisão e na confiabilidade das imagens em nossa mente (SF: 13). De acordo com Mill, a imagem retida na memória substitui plenamente o objeto sensível. Dessa maneira, novas verdades matemáticas podem ser geradas sem o concurso de objetos externos. Cassirer assim explica:

“Desta maneira pode ser concebido que, a fim de atingir novas verdades geométricas ou aritméticas, nós não necessitamos de renovar as percepções de objetos físicos; a imagem-memória, em virtude de sua clareza e distinção, é hábil para suplantar o próprio objeto sensível” (SF: 13).

No entanto, as relações entre as proposições matemáticas são estabelecidas de maneira hipotética. Logo, nenhuma coisa concreta precisa concordar com definições ou conteúdos da aritmética ou da geometria. Não existem pontos, retas ou planos concretos. A dupla explicação fornecida por Mill para fundamentar a aritmética e a geometria, destrói a si mesma. Ele estabelece uma similaridade entre as idéias matemáticas e as impressões sensíveis originais, porém, esta similaridade não existe, pois as idéias matemáticas não são inerentes às coisas. Assim Cassirer afirma: “Na definição de matemática pura, como a explanação do próprio Mill mostra, o mundo das coisas sensíveis e suas representações são, não só reproduzidas, como transformadas e suplantadas por uma ordem de outra espécie” (SF: 14).

Nas definições da matemática pura os dados das impressões não são apenas reproduzidos na ordem em que eles ocorrem, mas, uma ordem diferente lhes é imposta. Essa nova ordem, analisada mais profundamente, nos revela várias funções e com isto, o conceito fica muito além da abstração tradicional. E o que é válido para os conceitos da matemática também vale para os da física. Nessa ciência os conceitos não são cópias dos objetos estudados. O que a física

faz é colocar em lugar de uma multiplicidade do sensível, outra multiplicidade coerente com as condições teóricas pré-estabelecidas. A pergunta chave que agora se deve responder é, se a teoria de conceito, como foi concebida por Aristóteles, e, posteriormente pelos mentalistas modernos, é “confiável” e “adequada” aos procedimentos das ciências concretas? A resposta a essa pergunta é evidentemente negativa (SF: 11 e 12).

## **1.4 Crítica de Cassirer à teoria clássica**

### **1.4.1 A reforma da lógica**

Segundo Cassirer, a evolução da ciência nas últimas décadas (lembrando que ele escreveu *Substance and function* em 1910) apresentava um quadro bem diferente daquele que, no passado, recebeu a influência da lógica tradicional (SF: 3).

A despeito da grande variedade de sistemas filosóficos, desde a antiguidade clássica até agora, a lógica formal neles empregada, permaneceu sem alterações significativas até bem pouco tempo. Cassirer chama atenção para uma mudança de rumo na modernidade. Quando se observa de uma maneira reflexa o desenvolvimento da ciência moderna, constata-se o surgimento de uma nova lógica formal. A lógica clássica, como instrumento usado na formação de muitas doutrinas filosóficas, vai aos poucos cedendo lugar a essa nova lógica. Essa nova lógica emergente é resultado de uma síntese bem conduzida entre a lógica clássica e a teoria da multiplicidade, que tem como caso particular, a teoria dos conjuntos. O importante é que essa teoria não se limita a solucionar problemas apenas no âmbito da matemática. Diante disso, a certeza incondicional oferecida pela lógica clássica só continua de pé mediante os ajustes propostos por essa nova lógica. Assim, a base do conhecimento ideal teve que ser revista (SF: 3 e 4).

Para Cassirer, a reforma moderna da lógica embora tenha produzido muitos frutos, ainda não atingiu o âmago do problema. Uma simples inversão da ordem entre teoria do juízo e teoria do conceito, ainda que bem vinda, é um expediente superficial. “Qualquer tentativa para transformar a lógica precisa

concentrar, acima de tudo, sobre este ponto: toda crítica da lógica formal está contida na crítica da doutrina da construção de conceitos ( *Begriffsbildung*)” (SF: 4). E mais, segundo Cassirer, só se terá “o conceito natural do mundo” quando se atacar “sua própria substância”, em outras palavras, “sua forma global” (FFS: 332). Ao estilo kantiano, Cassirer estabelece um novo tribunal. Eis suas próprias palavras. “Todos os testemunhos anteriores da ‘realidade’, por seguros e fidedignos que sejam, a ‘sensação’, a ‘representação’, a ‘intuição’, são agora citados ante um tribunal e interrogados” (FFS: 332). Que novo tribunal é esse? O próprio Cassirer responde:

“Este tribunal do ‘conceito’ e do ‘pensamento puro’ não é constituído no mesmo momento em que se inicia a própria reflexão filosófica senão que corresponde já aos começos de toda consideração científica do mundo, pois já aqui o pensamento não se contenta simplesmente em traduzir para sua linguagem o dado na percepção ou intuição, senão que efetua uma transformação característica do dado, uma reformulação ideal” (FFS: 332).

O aparato matemático que rege a transformação que a mente impõe aos dados sensoriais para construir conceitos válidos objetivamente, será mais à frente explicitado.

Agora, passa-se a elucidar os propósitos e a natureza da formação dos conceitos genéricos. Evidentemente, o ponto de partida é o aspecto múltiplo das coisas no mundo e o poder da mente para identificar e selecionar as que apresentam uma característica comum, segundo um dado interesse. Através da reflexão, quando vários objetos particulares são percorridos, a fim de determinar uma característica comum, entra em cena o processo de abstração. Esse processo elimina dos objetos selecionados os elementos que não são similares, uma vez que tem em vista a unidade do conceito, e isto, é feito a qualquer custo. De início, já fica claro que este procedimento só apresenta um aspecto da realidade fenomênica que pretende conceituar.

No supremo gênero de um grupo de objetos somente estão presentes as características que foram preservadas, e as espécies são definidas em função delas. Essas características mantidas estabelecem a extensão do conceito. Quando “se desce” de um nível mais alto para um mais baixo, essas



características aumentam e quando “se sobe”, elas diminuem. Assim, quanto mais geral é um conceito, menos conteúdo específico ele tem. O nível mais alto de um conceito é, portanto, o mais pobre e vazio de todos. Esta vacuidade de um conceito supremo levanta a primeira suspeita sobre a teoria tradicional da formação dos conceitos (SF: 6).

Para Cassirer, há um hiato entre os conceitos envolvidos nas leis científicas e os conceitos filosóficos que examinam os fundamentos dessas leis. Será detalhado mais a frente como esse hiato será preenchido pelo conceito matemático de função. Esse conceito servirá de ponte que possibilitará a transferência da precisão do conceito matemático para o filosófico.

O que se espera de um conceito é uma especificação que não dê margem a nenhuma ambiguidade. A teoria tradicional da formação de conceitos quando comparada com a formação dos conceitos científicos deixa dúvidas sobre sua validade e aplicabilidade. Como já se antecipou, Cassirer afirma: “Se o alvo final deste método de formação de conceitos é inteiramente vazio, então todo o processo que conduz a ele deve levantar suspeita” (SF: 6).

Um conceito científico não pode apresentar indefinição ou ambiguidade. Assim, o processo tradicional de formação de conceito está longe de evitar esse inconveniente, logo, não oferece garantia, pelo menos no que tange à sua aplicação no campo da ciência. Quanto maior o avanço no processo de formação de um conceito científico, mais ele se torna determinado e preciso. O inverso se dá na formação tradicional dos conceitos; quanto mais um conceito aproxima-se da meta final, mais vago e impreciso fica. Do ponto de vista lógico, defronta-se agora com um problema que se instala no núcleo da formação dos conceitos. Quando uma propriedade similar de vários objetos é eleita para representar a essência deles, em realidade, esta se tomando uma parte pelo todo, e o processo não oferece nenhuma garantia que a propriedade escolhida re presente a real “essência” do objeto. Além do mais, o conceito superior deve explicar o inferior, o que no caso, não ocorre. Cassirer afirma:

“O conceito mais alto visa tornar inteligível o mais baixo, estabelecendo na abstração o *fundamento* da sua forma especial. De qualquer modo, a

regra tradicional para a formação do conceito genérico não contém em si nenhuma garantia que este fim será realmente atingido” (SF: 6).

Fica claro que esse processo não garante que a propriedade comum escolhida seria exatamente aquela que determina a estrutura de todos os elementos do conjunto. Disso evidencia que, o processo de formação do conceito tradicional é insuficiente e precisa ser complementado. O processo de subida é perfeitamente válido, mas é insuficiente, na medida em que, pura e simplesmente, vai abandonando as características particulares do objeto. Por outro lado, há uma necessidade de preservar o particular no universal para, a qualquer momento, voltar a ele sem ambiguidades.

### **1.4.2 Conceitos filosóficos e matemáticos**

Como citado anteriormente, em Aristóteles, os conceitos visavam descrever e classificar objetos das ciências naturais. Porém, fora dessas ciências sua teoria de conceito não apresentou o sucesso esperado (SF: 12). Um fato que exemplifica essa inadequação da teoria aristotélica fora da biologia é sua aplicação aos conceitos de entes geométricos. Eles não podem ser abordados eficazmente pela teoria aristotélica. Após uma breve argumentação sobre a anterioridade da substância ao atributo, Aristóteles conclui:

“É claro, pois, que nem o resultado da abstração tem anterioridade, nem o que se produz pelo acréscimo de determinantes tem posteridade substancial; pois, é pelo acréscimo de um determinante a ‘pálido’ que falamos no homem pálido. O que procede basta para provar que os seres matemáticos não são substâncias em grau mais eminente do que os corpos; que não são anteriores aos sensíveis quanto ao ser, mas apenas quanto à definição; e que não pode ter em lugar algum uma existência separada. Mas, como tampouco é possível que existam nos sensíveis, torna-se evidente que não existem em absoluto, ou existem em algum sentido especial ou restrito. Com efeito, ‘existir’ tem muitas significações” (*Met.*, XIII, 2 1077 b 14-19).

Aqui, evidentemente, Aristóteles está se posicionando contra a hipótese das idéias de Platão, mas ele não proíbe de tratar os entes matemáticos como se fossem idealizados; uma vez que, conceitos tais como ponto, linha e superfície não são abstrações de coisas reais porque eles não existem nestas coisas.

Os conceitos matemáticos são gerados por definições genéticas <sup>6</sup> (SF: 12) e se apresentam com características completamente diferentes dos conceitos construídos pelo processo de abstração tradicional. Enquanto esses últimos procuram encaixar em uma unidade toda a similaridade das coisas, os primeiros criam uma multiplicidade através de uma síntese progressiva de conexão construtiva que é executada pelo intelecto (FFS: 338). Esse novo processo de “abstração” aparece aqui em oposição a uma abstração vazia, como um ato do próprio pensamento construindo um sistema de relações. Cassirer assim afirma:

“Aparece aqui, em oposição a uma vazia ‘abstração’, um agir do próprio pensamento, uma livre produção de certos sistemas relacionais. Pode ser facilmente entendido que, a teoria lógica da abstração, mesmo em suas formas modernas, tem frequentemente tentado apagar esta oposição, pois é neste ponto que questões como o valor e a unidade interna da teoria da abstração precisam ser decididos” (SF: 12).

A teoria da formação de conceitos tem um aspecto lógico, um aspecto psicológico e, por último, um aspecto metafísico. O processo de abstração matemática descarta os aspectos metafísicos e psicológicos do conceito e se atém apenas ao aspecto lógico do mesmo. A separação requerida no processo abstrativo tem um caráter lógico-linguístico e não ocorre na mente, e sim no discurso. A abstração é feita atribuindo definições aos entes matemáticos. Por exemplo, esfera é uma superfície idealizada formada por todos os pontos do espaço, equidistantes de um chamado centro. Esse conceito é abstraído de qualquer corpo arredondado, idealizando-lhe a superfície, e impondo-lhe uma definição que estabelece a condição de igual distância da superfície ao centro (Silva, 2007, p. 225). Se, além disto, quando a definição matemática indica o modo pelo qual a figura é gerada, ela se diz genética.

Privilegiar o aspecto lógico da formação de conceitos representa, para Cassirer, um divisor de águas: “Ou a doutrina da abstração [tradicional] perde a

---

<sup>6</sup> A definição real ou genética, diferentemente de uma definição nominal, garante por si só a existência do que é definido (FFS: 419, 430 e 431). Uma esfera, por exemplo, é definida como o sólido geométrico gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno do seu diâmetro.

sua validade universal, ou perde o seu caráter lógico específico que, de origem, lhe pertence” (SF: 12).

### **1.4.3 Aspecto psicológico da abstração aponta o caminho**

Os mesmos problemas gerados pela abstração tradicional comparecem também em toda visão ingênua do mundo. Os conceitos de múltiplas espécies e gêneros surgem por suposição das similaridades dos elementos contra a s suas diversidades. Enquanto as primeiras aparecem em toda s as coisas, as segundas mudam de caso para caso. A similaridade pode ser frutífera ou julgada como tal, porém; ela é incapaz de resolver a questão. A característica principal da abstração é o ato de identificação que liga um conteúdo observado no passado, a outro similar no presente, através de uma síntese que não tem nenhum correlato na percepção. Apesar da inadequação da teoria psicológica da abstração, anteriormente salientada, ela fornece uma pista valiosa para a solução do problema: uma impressão do passado é ligada a uma impressão similar no presente, e esta identificação é o fundamento de toda a abstração, mas dependendo do tipo de síntese, o mesmo conteúdo pode ter apreensões de formas diferentes.

Esse “postulado” da psicologia da abstração garante que os elementos da percepção possam ser ordenados, para considerações lógicas, em “séries de similares” (SF: 15). O conceito de objetos abstratos, sem estes arranjos, jamais poderia surgir. Além disso há um processo de dependência entre os membros da série.

“Dizemos que uma multiplicidade sensorial é conceitualmente apreendida e ordenada, quando seus membros não permanecem próximos um ao outro, sem relação, mas, procedem de um definido princípio, de acordo com uma fundamental relação geradora, em necessária sequência. É a identidade desta relação geradora, mantida através das mudanças nos conteúdos particulares, que constitui a específica forma do conceito” (SF: 15).

A representação das coisas com seus elementos semelhantes, como o lado psicológico da questão, não afeta o conceito com acima entendido. Assim, a pobreza da teoria da abstração tradicional, vista por outro ângulo, é aparente,

pois, comporta uma riqueza quando sugere diversas maneiras possíveis de ordenar o conteúdo. Só quando esses conteúdos são ordenados conservando suas qualidades e peculiaridades é que se atinge o verdadeiro significado de conceito. Se, por um lado, séries com elementos estritamente semelhantes são concebidas, por outro, pode-se também concebê-las com elementos que apresentam certo grau de diferença entre si. Assim, são concebidas séries ordenadas de acordo com: igualdade, desigualdade, números, magnitudes espaciais e relações temporais ou causais. Cassirer aponta um caráter de necessidade entre os elementos relacionados:

*“A relação de necessidade assim produzida é um caso decisivo; o conceito é meramente a expressão e invólucro dela, e não a representação genérica que pode surgir incidentalmente sob circunstâncias especiais, mas, que não entra como um efetivo elemento na definição de conceito” (SF: 16).*

#### **1.4.4 A lei que une os elementos: função**

Como constatado na citação anterior, o núcleo do conceito segundo Cassirer é a relação de necessidade. Ele afirma que o conceito é apenas uma “casca”. O seu núcleo é uma relação de necessidade entre os elementos do conteúdo que, de modo geral, aparece oculta por expressões ambíguas tais como; “comparar conteúdos”. Há então uma necessidade de aprofundamento no que deve ser entendido por comparação de conteúdos. Nesse aprofundamento percebe-se a existência de diversas funções camufladas por nomes coletivos. A abstração costumeira obscurece a questão, uma vez que ela favorece a ambiguidade, confundindo a definição do conteúdo da percepção com as partes do próprio conteúdo (SF:16). Além disso, tanto a similaridade, quanto a diversidade, não são componentes da sensação, são inferidas pela mente.

As qualidades de uma coisa e a relação entre elas são colocadas no mesmo nível e misturadas. A tarefa do pensamento como sempre foi suposto, é de unicamente selecionar o elemento comum em várias coisas. Essa seleção da propriedade comum presente em diversas coisas é apenas uma, entre outras várias possibilidades de conexão. Essa tarefa não se resume apenas em

identificar um elemento comum pela similaridade em uma série. A conexão dos membros de uma série através de uma propriedade comum é apenas uma possibilidade lógica. Por exemplo, na série ar, as, at, (...), o elemento comum **a** é abstraído, mas, pode ser ligado a outra série a, b, c, d, (...). Em uma dada série, embora o conteúdo de cada termo seja diferente, as regras de ligação são as mesmas.

A ligação entre os membros de uma série é estabelecida por uma lei que possibilita uma sucessão. O que une vários elementos de uma série não é um novo elemento, e sim, uma regra de sequência<sup>7</sup> que é independente dos elementos e não contém nenhum deles. Essa lei é uma função.  $F(a, b)$  liga a com b.  $F(b, c)$  é a mesma função, mas agora liga b a c e assim sucessivamente (SF: 17). A unidade do conteúdo conceitual é extraída dos elementos, mas, esse processo deve ser entendido como efetuado sobre a conexão dos elementos constituintes, e nunca no sentido de que a regra seja por alguém construída, quer negligenciando algumas partes, quer fazendo súmula de algumas descobertas e que, seja por fim, imposta aos elementos da série. Desse modo, a “abstração” é feita **sobre a conexão** dos elementos e não **entre os elementos**. Com isso, uma prioridade da relação sobre os elementos é estabelecida. Essa representação funcional dos conceitos será retomada e aprofundada no segundo capítulo desta dissertação.

Na construção dos conceitos, o aspecto lógico aparece na relação entre o todo e a parte. Já o conceito genérico supõe a relação entre a coisa e seus atributos, mas pretende equivaler ao aspecto lógico baseado em auto-evidência que não existe, uma vez que, o que parece ser “dado”, na realidade é inferido. Aqui se tem o início de um processo que abrange o conceito do todo e de suas partes, bem como, o conceito de coisa e seus atributos inseridos em um sistema de categorias lógicas. Afirma Cassirer: “Os atos categóricos com os quais caracterizamos os conceitos do todo e de suas partes, e da coisa e seu atributos, não estão isolados, mas pertencem a um *sistema* de categorias lógicas que, contudo, não intentam exaurir” (SF: 18). Assim, por um lado, para descrever um

fato no mundo natural, a categoria **coisa** fornece apenas uma visão ingênua e, por conseguinte imprecisa. Por outro lado, a matemática pura oferece um conceito preciso onde, no início, as propriedades das coisas são desconsideradas. Partindo do estabelecimento do sistema lógico de relações, todas as propriedades da coisa que foram inicialmente desconsideradas pela abstração matemática sob o aspecto psicológico, podem ser perfeitamente determinadas, pois foram preservadas sob o aspecto lógico.

#### **1.4.5 Teorias de conceitos comparadas**

A doutrina tradicional da formação de conceitos, em virtude do seu processo abstrativo apresenta um lado sumamente negativo, principalmente, quando ascende do particular para o universal. Nessa “subida” serão excluídos os elementos diferentes por considerá-los irrelevantes no objeto alvo da abstração. A capacidade de esquecimento da mente favorece tal processo, pois, ela tende naturalmente a desconsiderar as particularidades.

As similaridades constatadas em vários objetos representados na mente devem ser retidas. Isto se deve exclusivamente à fraqueza das imagens reproduzidas pela memória. A comparação feita entre um atributo de um objeto presente com um ausente representado na mente, nunca se apresenta com uma similaridade absoluta. Há sempre uma diferença de grau entre o mesmo atributo de objetos diversos. Assim, quanto maior a concentração na intuição dos elementos sensíveis de um objeto, maior a incapacidade de estabelecer seu conceito pelo processo tradicional, pois; quanto mais nítido se torna um atributo do objeto considerado, mais diferente ele aparece do seu “similar” em outros objetos. Se os aspectos parciais dos objetos, em cada nova percepção, fossem acumulados até atingir sua totalidade em uma imagem na memória, não haveria condições de escolher nenhum deles, uma vez que, apresentariam graus de diferença de uma para outra percepção. Assim, a formação tradicional de conceitos é fruto de uma “debilidade” da mente (SF: 18).

---

<sup>7</sup> Sequência, em matemática, é uma sucessão de termos ligados por uma lei bem definida.

É em sua precisa definição e clareza que o aspecto lógico -matemático dos conceitos se diferencia dos aspectos ontológicos ou psicológicos. Cassirer contrasta a precisão dos primeiros, quando comparados com os últimos.

Uma fórmula matemática contém, não apenas todos os casos particulares que pertencem ao seu domínio, mas, a possibilidade de dedução de cada um deles a partir dela. Aqui se evidencia a maneira diferente da construção dos conceitos na matemática e na ontologia, principalmente na escolástica. Enquanto que os primeiros levam consigo, na ascensão para o universal, todos os casos particulares bem como a possibilidade de os deduzirem a qualquer momento; os segundos fazem sua ascensão excluindo os casos particulares.

Para Cassirer, em verdade, nos conceitos ontológicos, o universal aparece simplesmente como uma palavra que deixou para trás os casos particulares que seu significado abrangia. Já no conceito matemático o universal aparece como uma ligação necessária entre os elementos particulares, e, o que constitui a universalidade é a regra que une esses elementos. Cassirer cita como exemplo expressivo, sem detalhar, a equação que representa o círculo e a elipse. Quando uma superfície cônica é cortada por um plano, dependendo de sua posição em relação ao plano da base, podem ser formadas as curvas: hipérbole, elipse, círculo, parábola (cônicas não-degeneradas) ou ainda: duas retas paralelas, uma única reta ou um ponto (cônicas degeneradas ou imaginárias). Todos estes entes geométricos estão incluídos na equação geral de uma secção cônica. Para deduzir uma curva ou outra basta colocar a equação em sua posição padrão que a característica peculiar da curva aparece. Cassirer, contrastando os dois tipos de conceitos, afirma: “Aqui o conceito mais universal mostrou -se também o mais rico em conteúdo” (SF: 20). E conclui:

“É evidente de novo que, a estrutura característica do conceito não é a ‘universalidade’ da representação, mas a validade do princípio de ordem de uma série. Nós não isolamos qualquer parte abstrata da multiplicidade que está diante de nós, mas criamos para os seus membros uma definida relação, ao pensá-los como unidos por uma lei que os inclua” (SF: 20).



Entretanto, deve ser salientado que, o conceito lógico-matemático não invalida o tradicional uso do conceito de universal na linguagem. Sem o uso de universais qualquer língua fica inviabilizada (Russell, 1969, Vol. I, p. 141).

#### 1.4.6 Exemplos: na álgebra e na química

Os lógicos modernos, segundo Cassirer, têm abordado essa questão, opondo-se à abstrata universalidade do conceito à concreta universalidade das fórmulas matemáticas. Enquanto o gênero negligencia toda a especificidade, a fórmula matemática a estabelece sistematicamente no todo. Cassirer cita outro exemplo, agora na álgebra, para evidenciar a superioridade do conceito matemático sobre o ontológico. Esse exemplo é tirado da página 22 do livro *Neue darstellung der Logik* de Drobisch<sup>8</sup> (SF: 20). O problema consiste em determinar dois “números inteiros” cuja soma é vinte cinco, e que um deles seja divisível por dois, e o outro por três.

Para tornar o exemplo mais útil e significativo deve-se considerar que: quando o autor diz “números inteiros”, quer dizer números naturais. Além disto, ele pede apenas um par de números nas condições dadas, porém no enunciado, deveria pedir todos os pares de números que são a solução do problema. Isto é o que pode ser deduzido pela solução que ele apresenta logo em seguida.

Como existem poucos pares de números naturais que adicionados totalizam vinte cinco, (primeira condição), eles podem ser todos listados para a escolha dos que satisfazem à segunda condição. São eles: vinte e dois e três, dezesseis e nove, dez e quinze, e finalmente, quatro e vinte e um. Assim, todas as soluções são possíveis, porém, se o conjunto universo for os números reais, este processo será inviável. Então, neste caso, usa-se um processo algébrico:

$$x + y = 25 \quad (1)$$

$$x = 2z \text{ e } y = 3z \quad (2)$$

---

<sup>8</sup> Trata-se de Wilhelm Moritz Drobisch (1802-1896). Foi um destacado membro da escola de Herbart. Interessou-se por lógica e psicologia.

Nesta solução,  $x$  e  $y$  são parametrizados em função de  $z$ , que fornecerá um parâmetro comum para satisfazer a segunda condição imposta pelo problema, isto é,  $x$  ser divisível por dois e  $y$  ser divisível por três ou vice-versa. Substituindo em (1) os valores de (2) vem:

$$2z+3z = 25, \text{ ou seja, } 5z = 25, \text{ logo } z = 5$$

De posse do valor de  $z$ , e substituindo-o em (2) obtém-se:

$$x = 2.5 = 10 \text{ e } y = 3.5 = 15.$$

Esta é apenas uma, dentre as quatro soluções já conhecidas. Esta é, evidentemente, uma solução particularizada pela obtenção do parâmetro  $z$ , comum aos números divisíveis por dois e por três. Uma solução geral e completa deve ser feita através de operações com funções.

Todos os valores do primeiro número  $x$  serão representados pela função  $A(z)$  e todos os valores de  $y$  por  $B(z)$ . Para satisfazer a primeira condição usa-se:

$$A(z)+B(z)=25 \quad (1).$$

Para satisfazer a segunda condição, que exige ser o primeiro número múltiplo de dois, por conseguinte par, e o segundo, múltiplo de três e ímpar usam-se:

$$A(z) = 2z \quad (2).$$

$$B(z) = 3(2z+1) = 6z+3 \quad (3).$$

A equação (1) reescrita e  $B(z)$  substituída por seu valor (3) encontra-se:

$$A(z)+6z+3 = 25 \text{ e isolando } A(z) \text{ no primeiro membro obtém-se;}$$

$$A(z) = 25-6z-3 = 22-6z \quad (4).$$

Agora todos os valores das funções  $A(z)$  em (4) e  $B(z)$  em (3) podem ser encontrados atribuindo a  $z$  os valores dos quatro primeiros números naturais, 0, 1, 2, 3.

$$A(z)=22-6z$$

$$B(z)=6z+3$$

$$A(0)=22$$

$$B(0)=3$$

$$A(1)=16$$

$$B(1)=9$$

$$A(2)=10$$

$$B(2)=15$$

$$A(3)=4$$

$$B(3)=21$$

Assim são encontrados todos os valores que solucionam o problema dentro das condições impostas. Considerando a adição dos dois números algebricamente, o domínio da função pode ser ampliado para todos os números naturais.

Na primeira solução desse problema, uma vez que seu universo era restrito a poucos valores, foi possível achar os números listando todos os casos. Na segunda solução, através de um sistema de equações paramétricas, um único par de números que atende as condições é encontrado. Na terceira solução, porém, obtêm-se, **todos** os pares de números que atendem às duas condições anteriormente apresentadas.

As funções que possibilitaram esse tipo de solução poderiam ainda ter seus domínios ampliados para todos os números naturais e o resultado seria de infinitos pares cuja adição algébrica totaliza vinte e cinco.

A fórmula expressa nessas funções apresenta uma concreta universalidade, pois abrange todos os casos possíveis e também qualquer caso particular, bastando para isto, a indicação de um parâmetro.

Cassirer endossa Drobisch que conclui: “Toda função matemática representa uma lei universal que, em virtude de sucessivos valores que a variável pode assumir, contém dentro de si todos os casos particulares para os quais ela é um suporte” (SF: 21). Para Cassirer, aqui está uma porta aberta para o desenvolvimento da nova lógica. Isto pode ser observado em suas próprias palavras:

“Se, entretanto, isto é uma vez reconhecido, um campo completamente novo é aberto para lógica. Em oposição à lógica do conceito genérico, que como nós vimos, representa o ponto de vista e a influência do conceito de substância, agora aparece à *lógica do conceito matemático de função*”. (SF: 21).

Para o autor, essa forma de lógica ultrapassa, em muito, o âmbito da matemática. Ela abarca todo e qualquer conhecimento da natureza, “pois o conceito de função constitui o esquema geral e modelo, de acordo com o qual, o moderno conceito de natureza tem sido modelado em seu progressivo desenvolvimento histórico” (SF: 21).

Cassirer cita ainda outro exemplo para ilustrar a formação de conceito segundo o esquema funcional. Trata-se do conceito de metal partindo do ouro, prata, cobre e chumbo. Pelo processo tradicional de abstração esses elementos vão perdendo suas características individualizantes e retendo apenas a característica comum a todos eles. Evidentemente, no conceito genérico de metal, não pode conter, por exemplo, a cor do ouro, da prata, do cobre e do chumbo etc. Se, por um lado, no processo de “subida”, para conseguir o conceito de metal, abandonam-se as características particulares dos elementos e nisto se obtém êxito, por outro lado, quando há a necessidade de precisar um elemento, o processo de “descida” para o particular, que vai identificar um metal, fica totalmente inviabilizado.

Cassirer cita livremente Lotze<sup>9</sup> sobre uma crítica que o mesmo faz sobre teoria tradicional da abstração. O autor pondera: “Como ele [Lotze] explica, a real prática do pensamento na formação dos conceitos não segue o curso prescrito por esta doutrina; pois ela nunca é satisfatória ao avançar para o conceito universal, negligenciando as propriedades particulares *sem reter um equivalente para elas*” (SF: 21).

Essa crítica chama atenção sobre os elementos que são abandonados no processo de “subida”. As características abandonadas devem ser substituídas por

---

<sup>9</sup> Rudolf Hermann Lotze (1817-1881), filósofo e médico, interessou-se na possibilidade de integração de dados das ciências com o pensamento filosófico.

algo equivalente a elas e, que garanta uma precisa identificação no movimento de “descida”. Aquilo que é abandonado de uma maneira, por não poder figurar explicitamente no conceito geral, terá que ser preservado de outra, para posterior identificação do particular. A coloração amarela do ouro não pode figurar no conceito geral de metal. Essa “marca”, característica do ouro, é substituída por uma variável que registra todas as cores que metais possam ter. Isto também deve ser feito para as demais características de todos os metais.

Na nova teoria, o abandono das peculiaridades de um objeto é apenas aparente, pois, no esquema funcional elas são preservadas e podem ser reconstituídas sempre que necessário. O que é cancelado de uma maneira é mantido por outra, segundo um novo esquema lógico. Nesse tipo de abstração é verificado um real ganho, pois, as propriedades fixadas na série por regra universal possibilitam a pesquisa de todas as determinações possíveis. De uma dada série: abc, ade, afg, etc. que representa um objeto qualquer onde, o elemento a é comum, e os demais, diferentes, porém variáveis, temos: A propriedade b estaria em função de x;  $B(x)$ . A propriedade c em função de y;  $C(y)$ . A propriedade d em função de z,  $D(z)$ , e assim sucessivamente. Os membros desta série podem ser unificados em a, x, y, z, (...), que contempla a totalidade de seus membros (SF: 23).

#### **1.4.7 Objetos de “primeira” e de “segunda ordem”**

Como se tornou evidente, o conceito matemático de função deve contemplar todos os elementos essenciais do objeto abstraído. Nele, não são abandonados os elementos diferentes, como no exemplo dos metais citados, para conservar apenas os que lhes são comuns. Todas as características desses metais são substituídas por variáveis que expressam todo o domínio de cada característica. O conceito assim construído é uma totalidade concreta que contém uma indexação para todos os casos particulares. Já no processo tradicional de abstração, que depende da acuidade visual de perceber uma característica comum entre vários objetos, é extremamente frágil. Quanto maior a concentração e confiança nas intuições sensoriais, tanto mais, os objetos exibem “similaridades” que parecem diferentes, e, por conseguinte, devem ser postas de lado segundo o

processo de abstração tradicional. E assim, ao infinito. Constatamos que, o elemento “similar” a vários objetos apresenta diferenças, ele se desqualifica com o elemento que deve ser preservado. Esse aspecto subjetivo é contraditório com o conceito de um “universal”. Já no processo funcional de conceito isto não ocorre, pois as diferenças são todas objetivamente preservadas através das variáveis da função. Na abstração funcional, as diferenças não são desprezadas, pois elas integram o objeto construído que equivale ao intuído. Assim, surge um novo objeto que substitui o objeto da percepção sensorial. Nesse novo objeto, que Cassirer denomina objeto de “segunda ordem”, o objeto da percepção sensorial seria o de “primeira ordem”, o seu conteúdo é expresso através de relações definidas por seus elementos particulares.

Na progressiva formação deste tipo de conceito a uniformidade pura e simples é complementada por uma conexão de necessidade que dispensa infintas repetições. Esse é o esquema que faz com que, qualquer objeto se apresente como unificado. Contudo nada impede falar de “abstração”, porém, o significado agora é a construção através da função matemática de um novo objeto que apresenta uma universalidade concreta contendo todas as diferenças específicas (SF: 23 e 24)

Em conclusão constatamos que a reforma da lógica clássica através da inserção de elementos da teoria dos conjuntos de Cantor ensejou uma nova teoria da formação de conceitos. Essa teoria exhibe uma estrutura matemática tipicamente funcional possibilitando a formação de um novo tipo de objeto que dispensa a intuição e a abstração exigidas na formação tradicional de conceitos. Assim, no lugar de objetos intuídos são colocados objetos construídos, e a estrutura matemática que possibilita essa substituição será detalhada no próximo capítulo.

## 2 Os conceitos matemáticos como funções

### 2.1 Introdução

A estrutura matemática necessária para a abordagem de qualquer objeto, de acordo com a nova teoria dos conceitos, parte na noção de número. Para Cassirer, é impossível qualquer visão profunda sobre a estrutura dos números fora de um contexto epistemológico, pois seu conhecimento é um caso particular da teoria do conhecimento. Cassirer é categórico: “Se não existisse número, nada poderia ser entendido nas coisas, quer nelas mesmas, quer em sua relação com as outras” (SF: 27).

Pitágoras (Séc. V a.C.) teria dito: “O número é o princípio de todas as coisas”. Um de seus discípulos, Filolau de Crotona, confirma esta concepção do mestre (AFFS: 244 e 245, Vol. II). Em um dos fragmentos de sua obra intitulada *Sobre a natureza* ele afirma: “E realmente tudo o que é conhecido tem número; pois nada é possível pensar ou conceber sem ele” (DK, 44 B 4).

Cassirer enfatiza dois pontos importantes que permanecem ainda hoje na posição pitagórica. O primeiro é que a idéia de número está dotada de uma capacidade que permite traduzir dados sensíveis em determinações lógicas (FFS:333). O segundo diz que, quando se aprofunda no conceito de número, passa-se a perceber que: “nele está enraizada a substância do conhecimento racional. Mesmo quando, o núcleo metafísico dos objetos não é mais nele visto, o conceito de número permanece sendo a primeira e a mais verdadeira expressão do método racional em geral” (SF: 27).

No mundo grego, a primeira noção de número se limitava ao que hoje se chama de números naturais. Para operar com números racionais (frações), os geômetras gregos usavam o que eles denominavam de proporções numéricas. Os pitagóricos acreditavam que todas as coisas eram expressões de números; e a relação entre elas, por consequência, era estabelecida mediante essas proporções numéricas (Eves, 2004, p. 104 e 105), logo, o número, para os pitagóricos, estava na origem tanto da aritmética como da geometria (FFS: 333).

Pelo teorema de Pitágoras, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário é raiz quadrada de dois, mas, o número assim obtido não é racional. Essa descoberta desencadeou uma crise no pitagorismo, e, de modo geral, na filosofia grega, pois suas consequências não atingiram apenas a matemática. Uma aplicação do teorema de Pitágoras deixou claro que, o lado do quadrado (cateto do triângulo) e sua diagonal (hipotenusa do triângulo) são **incomensuráveis**, ou seja, não admitem uma medida comum. Assim, foi constatada a existência de números cuja natureza difere radicalmente da natureza dos números admitidos até então. Com essa constatação, evidenciou-se que o tema não fora tratado de uma maneira completa.

Na visão de Cassirer, os pitagóricos estão corretos, mesmo quando trataram o número como figuras espaciais, pois, “O número tem originalmente uma natureza tanto geométrica como aritmética” (FFS: 333). Assim, passar da aritmética para a geometria não é penetrar em território estranho, pois as figuras não são desassociadas de medida e essa de número. Na construção de conceitos, o alvo do conhecimento é atingido quando, começando pela lógica, e



passando pela matemática (aritmética e geometria) chega-se aos objetos físicos empíricos (FFS: 447).

O aparecimento de novas geometrias no século dezenove, denominadas de não-euclidianas, provocou impacto tanto na matemática, como na filosofia (Silva, 2007, p. 26). A chamada “crise dos fundamentos” levou matemáticos e filósofos reverem os fundamentos da matemática. Nessa tarefa, sobressaem Bertrand Russell (1872-1970) e Gottlob Frege (1848-1925) que procuraram fundamentar a matemática na lógica moderna. Essa lógica, com já se mencionou, mantém princípios da lógica clássica, acrescidos de elementos da teoria dos conjuntos de Georg Cantor (1845-1918). Esse matemático estabeleceu em sua obra, *Fundamentos de uma teoria geral da multiplicidade*, (1883), o conceito de número relacionado-o ao conceito de classe. Essa posição direcionava-o para a adoção da “teoria cardinal”. Na lógica assim suplementada, Russell viu o fundamento para toda matemática e, Frege, apenas para a aritmética. Contudo, para ambos os filósofos, um maior rigor na dedução do conceito de número se fazia necessário.

Na aritmética, Cassirer optou pela “teoria ordinal” de número, deduzida por Richard Dedekind (1831-1916), contra a “cardinal” de Frege-Russell, porque, para ele, é a ordinalidade que traduz a “essência” original do número, e não a cardinalidade, que é, em verdade, derivada. Do ponto de vista estritamente matemático, para analisar número, não faz diferença se, se parte do número cardinal ou ordinal, desde que se contemplem os dois aspectos do número (EPC: 91 e 92 Vol. IV). Mas, “A concepção filosófica fundamental sobre a qual,

substancialmente descansa a ‘teoria ordinal’ tem sido caracterizada por Dedekind de modo mais simples e acurado” (EPC: 99 e 100 Vol. IV).

Já a geometria, para Cassirer, é um saber que repousa essencialmente em invariantes. As propriedades legitimamente geométricas são apenas aquelas que permanecem após adequadas transformações projetivas. Essa posição faculta a Cassirer uma nova significação das propriedades geométricas de uma figura. Assim, a matemática não é mais uma ciência da quantidade, e sim, da relação. Além disso, tanto na aritmética, como na geometria, Cassirer mostra uma nova versão do sintético *a priori* kantiano.

No presente capítulo, serão acompanhados os esforços de Frege, Russell e Dedekind para estabelecerem um conceito de número mais convincente. Cassirer aceita a dedução de número estabelecida pelo último. Entretanto, ele vai além da posição de Dedekind, pois, para ele, número não é apenas o ponto de partida da aritmética, mas a base da própria racionalidade (SF: 27), o “princípio supremo do conhecimento” (EPC: 101 Vol. IV). Na dedução de número feita por Russell, apesar dos avanços em relação à posição de Platão e Aristóteles, esposada por Euclides<sup>10</sup>; Cassirer ainda vê presente resquício do substancialismo aristotélico. Já no século dezenove, a posição fregeana, ainda que pese seus avanços lógicos, não logrou atingir a “essência” de número, que, segundo Cassirer, é uma posição bem definida em uma série ordenada.<sup>11</sup> Daí sua irrestrita adoção a “teoria ordinal”

---

<sup>10</sup> Para Aristóteles, o **um** significa a medida de pluralidade e **o número** a pluralidade de medida. (*Met.*, XIV, 1 1087 b – 35 – 1088 a 10). Euclides, em *Os elementos*, Livro VII, definição 2, semelhante à Aristóteles define: “E número é uma quantidade composta de unidades” (Euclides, 2009, p. 269).

<sup>11</sup> Em matemática, Cassirer é estruturalista (Porta, 2004, p. 152 e 153). O estruturalismo é uma versão recente do *platonismo* (Silva, 2007, p. 71).

de Dedekind. No presente capítulo, ficará explícita a visão de Cassirer sobre a formação dos conceitos da matemática em seus ramos mais elementares, aritmética e geometria, contemplando respectivamente, **número e espaço**.

## **2.2 O conceito de número**

### **2.2.1 Fundamentação lógica do conceito de número**

As investigações realizadas por Frege foram de suma importância para a lógica e para a matemática, pois seu trabalho era tipicamente fundacional. Ele pretendia fundamentar a aritmética na lógica. Sua primeira tarefa foi ampliar a lógica clássica que, segundo ele, além de insuficiente, estava contaminada pela ambiguidade da linguagem comum. A lógica clássica exibia algumas características que deviam ser revisadas. São elas: 1) é bivalente, ou seja, apresenta apenas dois valores lógicos, verdadeiro ou falso; 2) é normativa, isto é, evita o falso e procura o verdadeiro; 3) está vinculada a uma metafísica essencialista, assim o que é lógico expressa necessariamente a realidade última das coisas; 4) ela é presa fácil da ambiguidade da linguagem comum (Frege, 1989, p. 80 e 81).

Além de Frege, Mill tentou fundamentar a matemática a partir da aritmética, mas, a teoria milliana tem, como viés, a teoria tradicional da abstração (SF: 29). Rejeitada essa, a teoria de Mill deve ser igualmente rejeitada. É o que fez Frege. Para ele, o fundamento da aritmética não pode ser nem empírico, nem psicológico. Somente a lógica é capaz de oferecer fundamento seguro para a aritmética. Sua tese maior pretende mostrar que toda a aritmética se reduz à lógica. Essa tese deriva da analiticidade da aritmética. Frege entende

diferentemente de Kant esse conceito. Para ele, a analiticidade de uma proposição é derivada de sua fundamentação em princípios lógicos e não, como supunha Kant, baseado no conteúdo expresso no juízo (Silva, 2007, p. 127 e 128).

Frege se posicionou frontalmente contra a dedução que Mill fez de número. Arranjos espaciais de pedrinhas ou sementes não podem fundamentar a evidência convincente das operações da aritmética (SF: 28 e Frege, 1989, p. 115). Se, para valores pequenos, esses arranjos poderiam ter uma aparente evidência; para valores maiores, o processo exibe toda sua impossibilidade. Não se pode ter uma intuição precisa de um número grande, seu antecessor e seu sucessor, a través de um monte de pedrinhas (SF: 29).

Para mostrar que a aritmética é reduzível à lógica, Frege traduz suas expressões em termos lógicos. Em seguida, mostra que essas expressões podem ser deduzidas dos princípios da lógica, emoldurados na teoria dos conjuntos (Silva, 2007, p. 126 e 127). Frege começa sua investigação sobre número examinando o que seus predecessores disseram sobre o assunto. Antes de entrar no assunto propriamente dito, estabelece certos princípios gerais que, segundo ele, são sempre negligenciados pelos matemáticos. São eles: Sempre separar, com rigor, o lógico do psicológico, o subjetivo do objetivo; abordar as palavras no contexto das proposições em que são usadas e nunca isoladamente; e por fim, não confundir o conceito com o objeto. O método usado por Frege é o da demonstração das noções mais elementares que, antes eram tidas com evidente, mas, agora provadas, o conduzirá ao conceito de número (Frege, 1989, p. 92 e 93).

No parágrafo quarenta e cinco de *Os fundamentos da aritmética* Frege apresenta uma síntese de toda sua investigação anterior. Nela é listado o que foi esclarecido e o que resta esclarecer. A conclusão a que chega, nesse primeiro momento de sua investigação para conceituar número, é negativa. Sua conclusão expressa o que número **não é** (Frege, 1989, p. 128). Logo em seguida, o autor apresenta sua própria definição. Para ele, a unidade de análise lógica não é o conceito, e sim a proposição. É essa última que lhe proporcionará o estabelecimento do conceito de número. Formalmente ele define: “O número que convém ao conceito F é a extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito F’ ” (Frege, 1989, p. 142). Nessa definição, o autor pressupõe que se saiba o que é extensão de um conceito. Para Frege, o conceito de número deve ser deduzido do conceito de igualdade numérica. A matemática elementar parte do pressuposto que os números estão bem definidos, e através deles, estabelece-se a igualdade ou desigualdade, conforme o caso (Frege, 1989, p.137 e 138). Na explanação fregeana a direção é invertida. Ele parte de um juízo que pode ser interpretado como uma igualdade, e que em cada um dos seus membros, figura, um número. Para ele, número é aquilo que é considerado com igual. Vale salientar que, a metodologia desta abordagem já sinaliza com a possibilidade da origem do número estar inserida dentro de uma estrutura que o determina. Se uma equação numérica é reduzida à igualdade da extensão do conceito, e se essa igualdade é regulada por critérios lógicos, qualquer equação numérica é uma igualdade lógica, e assim, a aritmética pode ser reduzida à lógica (Silva, 2007, 130 e 131).

No entanto todo o trabalho de Frege pressupõe a teoria dos conjuntos, na qual, Russell descobriu um paradoxo. Essa descoberta invalidou o trabalho de

Frege (Eves, 2004, p. 674 e 675). Após longo exame do problema, Russell chegou à conclusão que a questão é de caráter lógico e não matemático. A lógica é que deve ser revista. Russell parte então para construir sua teoria dos tipos como um antídoto aos paradoxos, e Frege abandona seu projeto logicista. Frege reconhece que o “paradoxo de Russell” invalida não só sua obra, mas qualquer tentativa de fundamentação da aritmética que faça uso de “extensão de conceitos, das classes, dos conjuntos” (Blanché, s. d. p. 323).

Quando é abandonada a teoria que estabelece as verdades aritméticas provindo de objetos externos, o caminho está aberto para admitir que essas verdades têm fonte mental. O número, quando visto por esse ângulo, está livre de todas as limitações que lhe são impostas. Na origem do número está presente o mesmo processo de formação de um objeto mental que é o pressuposto para formação de um universal.

“A tentativa de ter o conceito como uma copia da realidade externa é diretamente abandonada; mas no lugar desta realidade externa aparece sua forma fenomenal em nossa mente. O ato da enumeração não fornece as relações das coisas nelas mesmas, mas somente a maneira na qual elas são refletidas na compreensão do nosso ego” (SF: 32).

Mas, diante disso, a dedução de número ainda apresenta um problema a ser resolvido. Sendo o número um conteúdo mental que pode variar de indivíduo para indivíduo, de uma circunstância para outra, como ele pode adquirir uma objetividade invariável? O conceito lógico de número não deve ser confundido com o conteúdo psicológico de sua apresentação. Assim afirma Cassirer:

“As relações características que prevalecem nas séries de números não são pensáveis como propriedade de conteúdos dados na apresentação. De uma apresentação, é sem significado dizer, que uma é maior ou menor do que a outra, o dobro ou o triplo dela, que uma é divisível pela outra, etc.” (SF: 33).

O caractere com o qual se representa o número é, às vezes, denominado numeral. Nenhuma alteração no numeral atinge o número. O numeral é o lado psicológico da representação, o número é o lado lógico, o primeiro é mutável, subjetivo e cultural, o segundo é imutável, objetivo e independente de cultura. Cassirer considera que a distinção entre o ato da apresentação e o seu próprio conteúdo não é suficiente para atingir o pleno significado a respeito psicológico do número. Essa é apenas uma condição para tal. Cassirer esclarece:

“O ato, pelo qual nós definimos unidades, e a síntese pela qual as reunimos em novas formas constituem somente a condição sobre a qual podemos falar da multiplicidade de elementos e de suas conexões. A atividade de diferenciação e conexão, sozinhas, nem qualquer conteúdo particular subsequentemente derivado delas podem ser o desejado correlato psicológico do conceito numérico. Não é com objetos da realidade, quer interna, quer externa, mas com atos da aprecepção que a determinação numérica é conectada e para qual volta para o seu real significado” (SF: 33).

Para Cassirer, a universalidade atingida pelo número é estabelecida com atos da aprecepção, e isto inaugura um novo ponto de vista para a fundamentação de número.

“Desse ponto de vista, número é chamado de **universal** não porque ele está contido como uma propriedade fixa em cada particular, mas porque ele representa uma constante condição de julgamento concernente a cada individual como individual. A consciência desta universalidade não é obtida por percorrer uma indefinida **pluralidade de casos**, mas porque já está pressuposto na apreensão de cada um deles; pois, os arranjos desses particulares em um todo que os inclui é somente possível pelo fato de que o pensamento está na posição de reconhecer uma regra, na identidade conceitual, a despeito de todas as diferenças e peculiaridades da aplicação” (SF: 34).

Emana dessa citação um conceito de número bem diferente do estabelecido por Frege e especialmente de Russell que se aborda a seguir.

Para Russell, toda aritmética, do ponto de vista formal pode ser derivada de três idéias e cinco proposições primitivas, além, é claro, da lógica pura (Russell, 1974, p.12). Essa sua posição diz respeito aos axiomas de Dedekind-Peano<sup>12</sup>. Contudo ele pensa que só esses axiomas não bastam para a axiomatização da aritmética, porque neles, fica livre a interpretação dos termos “zero”, “número” e “sucessor” (Veja nota doze). Russell pensa que números não são apenas para verificar fórmulas da matemática, mas devem também, de certo modo, dizer respeito às coisas concretas (Russell, 1974, p. 16). Essa sua postura em não desvincular em sua teoria, número de objetos concretos, compromete uma exposição consistente da mesma.

Russell assim define número: “O número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela” (Russell, 1974, p. 24). Essa é sua definição de um número determinado. Ele, em seguida, mostra sua definição geral de número: “Um número é qualquer coisa que seja número de alguma classe” (Russell, 1974, p. 25). O próprio autor antecipa a acusação de uma circularidade.

“Tal definição tem aparência verbal de ser circular, mas na realidade não o é. Definimos ‘o número de uma determinada classe’ sem usar a noção de número em geral: podemos, portanto, definir número em geral em termos de ‘o número de uma determinada classe’ sem cometer qualquer erro lógico” (Russell, 1974, p. 25).

---

<sup>12</sup>Os axiomas são: 1) **Zero** é um **número**. 2) O **sucessor** de qualquer **número** é um **número**. 3) Não há dois **números** com o mesmo **sucessor**. 4) **Zero** não é **sucessor** de **número** algum. 5) Qualquer propriedade que pertença ao **zero**, e também ao **sucessor** de todo **número** que tenha essa propriedade, pertence a todos os **números**. Esses axiomas valem para qualquer significado dos termos em negrito. Eles foram estabelecidos por Dedekind, mas divulgados por Peano com outra notação, por isso eles são mais conhecidos como axiomas de Peano (Silva, 2007, p. 144).



Entre o conceito de número estabelecido por Frege e o de Russell há semelhanças significativas. Russell garante que estabeleceu sua definição de número sem conhecer a de Frege (Russell, 1960, p. 55). Enquanto a definição de Frege é estabelecida apoiando-se no conceito equinúmero das classes através de uma função proposicional, a de Russell é baseada na similaridade das classes. Duas classes são similares quando seus elementos podem ser relacionados um a um. O número, para Russell, é uma propriedade entre as classes. “Um número, em geral, é um conjunto de classes dotadas de uma propriedade chamada de ‘similaridade’” (Russell, 1960, p. 56). A diferença entre os dois filósofos foi minimizada com uma mudança de posição efetuada por Russell. Pode-se ver isso em suas próprias palavras:

“É conveniente, na matemática pensar-se em classes e, durante longo tempo, julguei necessário distinguir entre classes e funções de proposição. Todavia, cheguei, afinal, a conclusão de que é desnecessária tal distinção, salvo como recurso técnico” (Russell, 1960, p. 55).

Há, entretanto, uma diferença com relação à **natureza** do número nas definições de ambos os filósofos. Frege provou em *Os fundamentos da aritmética*, que a natureza do número é de caráter ideal contra a “noção” empírica de número, defendida por Mill, porém, Russell tende a resolver o problema do número ligando-o a objetos concretos, o que complica por demais o problema (Russell, 1974, p.16). Levando em consideração esse aspecto, Russell está aproximado inconscientemente e contraditoriamente da concepção milliana (Manno, s.d., p. 84). Russell lista várias vantagens de sua definição de número. Entre elas ressalta: 1) resolver os problemas do zero e do um; 2) vencer as dificuldades relativas a um e

o múltiplo; 3) não permitir que números sejam tratados como entidades metafísicas; 4) reduzir todas as questões sobre números aos termos lógicos “o u”, “não”, “todos” e “alguns”; 5) por fim às questões de números infinitos (Russell, 1960, p. 56).

É de suma importância ressaltar que ambas as definições, em última instância, tem por fundamento a teoria dos conjuntos, que, apesar de sua simplicidade, se revelou problemática, pois dela emergiu, pelo menos, um paradoxo que invalidou o trabalho de Frege e de Russell sobre número, como já se ressaltou. Mesmo com a teoria dos tipos<sup>13</sup>, criada por Russell para evitar esse paradoxo, sua posição não fica a salvo das críticas.

A concepção de número estabelecida por Russell foi baseada na equivalência das classes. Nelas, a ordem<sup>14</sup> não é essencial, logo os elementos podem ser listados aleatoriamente. Já na concepção de Dedekind, a ordem é essencial, mas a posição relativa do número não significa de modo algum uma limitação ao caráter objetivo do mesmo. Para Cassirer, a teoria dos números é um caso particular da teoria das formas. O número sendo um tópico da matemática pura, não deve envolver com as coisas contadas. Número emana das leis puras do pensamento, esta é a base filosófica da dedução de Dedekind, citada por Cassirer.

---

<sup>13</sup> A teoria dos tipos estabelece uma hierarquia entre os predicados das proposições, limitando a teoria dos conjuntos. Por ela, é vedado a falar de pertinência entre entidades de níveis diferentes (Blanché, s. d., p. 330).

<sup>14</sup> Russell se posiciona radicalmente contra a “teoria ordinal”. “Na contagem, é necessário tomar os objetos contados em uma certa ordem, como primeiro, segundo, terceiro etc., mas a ordem não é da essência do número: é um acréscimo irrelevante, uma complicação desnecessária do ponto de vista lógico” (Russell, 1974, p. 23).

“O conceito de número segue sendo, a partir deste ponto de vista, uma ‘emanação direta das leis puras do pensamento’, já que a função fundamental do pensamento consiste precisamente na operação encaminhada a ‘relacionar umas coisas com outras, fazendo que, a uma coisa corresponda outra ou que reproduz ou copia a outra’ função esta sem a qual não seria possível pensamento algum” (EPC: 100 Vol. IV).

Como já se salientou, número é o princípio supremo do conhecimento. Essa, e outras verdades defendidas pelos pitagóricos são plenamente endossadas por Cassirer (AFFS: 244, 245, 249, 250, 251, 253 e 262, Vol. II). O estabelecimento dos números naturais é o fundamento de todo o edifício numérico, pois, ao longo da história da matemática, todos outros tipos de números surgiram a partir deles. Entretanto, mesmo nos meios matemáticos sempre houve oposição à criação de novos números. Essas criações eram vistas como algo arbitrário e fantasioso pelos seus opositores. O fundamento da objeção não era matemático, e sim ontológico, pois, o novo tipo de número realmente resolvia o problema a que se propunha. Pensava-se que, ao criar novos números, os matemáticos estavam “criando” novos “seres”. A inversão da fundamentação ôntica do número para a metodológica possibilitou, sem criar novos problemas, uma ênfase legítima sobre o número ordinal cuja significação não é outra senão , a de relações recíprocas. Assim, o perigo de “criar” novos entes está afastado. Cassirer cita como exemplo, a dedução dos números irracionais por Dedekind (EPC: 102 Vol. IV).

Número ordinal é um ser de relação, e nessa perspectiva a criação de novos números não é problemática. O processo criativo consiste em avançar na estrutura de um sistema de relações. Para a dedução dos números irracionais, o pressuposto é uma mudança de relações seguida de uma ampliação do campo

das operações. Pode-se constatar isso: Números naturais sempre têm um antecessor e um sucessor, exceto o zero, para o caso do antecessor. Essa é uma propriedade estrutural deles. Já para os números racionais isto não acontece. Um número racional não tem nem antecessor nem sucessor. A estrutura anterior é quebrada. O mesmo acontece com os números irracionais e com os imaginários. A estrutura de cada tipo é sempre outra. No caso dos complexos, a estrutura perde a propriedade da ordenação. Entre esses números não faz sentido falar em “estar entre”, ou seja, dizer que um complexo é maior ou menor do que o outro. Com essa abordagem, os números perdem por completo seu caráter metafísico ou misterioso. Contudo a criação de números não está sujeita à subjetividade e nem ao arbítrio do matemático, pois, do ponto de vista operacional, cada conjunto numérico tem que ser redutível ao caso anterior sem contradição. Entretanto, o princípio da não contradição, que é necessário, não é suficiente. Os novos números criados são sinais de determinadas conexões sistemáticas que já podem manifestar-se dentro do seu campo original (EPC: 111 Vol. IV).

Na dedução dos números irracionais é onde se constata, com toda clareza, que o princípio envolvido no estabelecimento de número é essencialmente mental. Mesmo quando esse estabelecimento tiver como ponto de partida as extensões geométricas, como no caso da diagonal do quadrado e seu lado, ou do comprimento da circunferência e seu diâmetro, fica completamente fora de cogitação estabelecer um número irracional apelando para medida empírica. A constituição de um número irracional não parte de algo dado através das dimensões dos segmentos, e sim de **leis** das construções geométricas, é claro, para os irracionais ligados à figura geométrica.

O processo de ampliação dos números aparece em sua forma mais pura na dedução do número irracional feita por Dedekind. Esses números são apresentados como “cortes” no conjunto de números racionais, que, por seu turno, são definidos com uma proporção que contempla apenas a relação ordinal, sem nenhum apelo para extensões, mensuráveis e divisíveis. Observa-se, por exemplo, o estabelecimento do número irracional raiz quadrada de dois. Qualquer número pertencente ao conjunto dos racionais o divide em dois subconjuntos. Denominam-se esses subconjuntos de A e B. O número irracional raiz quadrada de dois será sempre maior do que qualquer número que pertença ao subconjunto A, por maior que ele seja. Por outro lado, ele será sempre menor do que qualquer número do subconjunto B, por menor que ele seja. Mantendo a ordem do conjunto, nenhum número racional pode efetuar essa divisão. Assim nasce o número irracional cuja característica intrínseca é exatamente a precisão da divisão. Cassirer confirma o surgimento não arbitrário desse número:

“O novo número, nessa forma de derivação, não é arbitrariamente concebido, nem é introduzido como um mero ‘símbolo’; mas ele aparece como a expressão de todo um complexo de relações que foram primeiramente deduzidas com estrita lógica. Ele apresenta, desde o início, um definido sistema lógico de relações e como tal, pode ser de novo ampliado” (SF: 59).

A objeção mais frequente dirigida a Dedekind é que sua dedução do número irracional supõe a existência de um único número determinado pelo “corte”. Essa objeção vem tanto de filósofos como de matemáticos. Para ilustrar o “corte”, Dedekind faz uma analogia com uma reta, que fica dividida em duas partes distintas e bem definida por um só de seus pontos. Essa propriedade da reta é chamada *axioma*. Dedekind aprofunda a comparação entre os números

racionais e os pontos da reta no parágrafo segundo de sua obra; *Continuity and irrational numbers*<sup>15</sup>. Cassirer concorda com Dedekind que todo número só apresenta o que dele foi estabelecido por definições conceituais. Assim, onde o “corte” foi feito deve existir um único número. Cassirer explana e argumenta que, o uso do axioma é desnecessário, pois o “corte” tem uma “existência” lógica garantida.

“O que aqui é determinado com absoluta precisão é a definição em si. Quando o sistema racional é dividido em duas classes A e B, por qualquer espécie de regra conceitual, nós podemos decidir com absoluta certeza, considerando qualquer um de seus elementos, se ele pertence a uma classe ou a outra; e, além disto, podemos mostrar que esta alternativa não deixa nenhum membro fora da conta; isto é, a divisão resultante é completa e exaustiva. O corte, como tal, tem assim indubitável ‘realidade’ lógica e não necessita ser confirmado por um postulado” (SF: 60).

Estando os números racionais ordenados, os vários “cortes” que dão origem aos números irracionais, também se apresentarão ordenados (Russell, 1974, p. 58). O que é de fundamental interesse aqui, é que, de um dado sistema ordenado, nasce outro sistema mais complexo de determinações arranjadas, mas ordenadas. Para Cassirer, a geração de número não surge por adições sucessivas.

“Nós vemos como a idéia fundamental da teoria ordinal de número é aqui verificada. A noção de número, que surge por sucessivas adições de unidades, e que, a sua verdadeira natureza conceitual é baseada nesta operação, deve ser abandonada” (SF: 61).

O caráter gerador de outras séries através dos números irracionais como estabelecido por Dedekind é o princípio pelo qual o todo é ordenado. Cassirer conclui: “O ‘ser’ conceitual de um número individual desaparece gradualmente, e

---

<sup>15</sup> Esse tratado de Dedekind está incluído em *Essays on the theory of numbers*.

claramente aparece sua peculiar ‘função’ conceitual” (SF: 61). A “teoria ordinal” parte do conceito de “um” com uma “posição” estabelecida com ponto de partida, e uma relação “geral de sucessão em série”. Logo, a “teoria ordinal” pressupõe séries e suas gerações. Cassirer pondera que, embora isso seja “uma limitação lógico-formal”, sob o ponto de vista do conhecimento, não tira o valor da teoria (EPC: 99 Vol. IV).

### 2.2.2 As séries e suas gerações

A axiomatização da aritmética feita por Dedekind garante que o conjunto dos números naturais é o menor sistema bem-ordenado que satisfaz toda propriedade hereditária<sup>16</sup>. Cassirer, ao adotar esse resultado de Dedekind, fica de posse da forma serial que tem a capacidade de gerar múltiplas outras com igual propriedade. Assim a multiplicidade de fenômenos poderá ser expressa através da multiplicidade dessas formas seriais, e nelas, o que importa é a lei que as estrutura, e não os elementos considerados neles mesmos.

O conjunto dos números naturais pode ser considerado como uma série infinita. Uma propriedade interessante dessa série, uma progressão, por exemplo, é possuir um número serial ômega<sup>17</sup>, que pode ser alterado sem que se acrescente ou se subtraia termo à série. Isto acontece por um simples rearranjo de seus elementos. Como exemplo, toma-se a série dos números naturais:

1, 2, 3, 4, 5,.....n,.....

---

<sup>16</sup> Entende-se por hereditária a propriedade do primeiro elemento do sistema e que é herdada pelo sucessor de qualquer elemento que a satisfaça.

<sup>17</sup> Número serial expressa a quantidade de séries que podem ser geradas a partir de uma dada série. O número Ômega é o menor dos números seriais infinitos

O rearranjo começa removendo o elemento dois para o final, e em seguida o quatro, o seis, e assim por diante. As séries assim se apresentarão:

1, 3, 4, 5, 6,.....n,.....2.

1, 3, 5, 6, 7,.....n+1,.....2, 4.

1, 3, 5, 7, 8,.....n+2.....2, 4, 6.

Generalizando o processo, tem-se:

1, 3, 5, 7, 9,.....  $2n+1$ .....2, 4, 6, 8,..... $2n$ .

Os números seriais dessas séries são denominados de: Ômega, Ômega mais um, Ômega mais dois, seguindo essa ordem, e, finalmente, dois Ômegas. Esse processo pode prosseguir dessa forma indefinidamente, gerando e rearranjando novas séries. Por exemplo, quando se lista os números ímpares, depois o dobro deles, em seguida o dobro desses últimos e assim sucessivamente, se obtém as séries:

1, 3, 5, 7, ..... 2, 6, 10, 14, ..... 4, 12, 20, 28,..... 8, 24, 40, 56,.....

Pode-se perseguir indefinidamente nesse processo de formação de progressões partindo da série dos números naturais. Essa série vale lembrar, satisfaz os axiomas de Peano (Silva, 2007, p. 198). As progressões que compõem a série anterior são aritméticas, porém, se houver um rearranjo, tomando cada termo, segundo sua posição, em cada uma delas, formam-se progressões geométricas, assim:

1, 2, 4, 8,..... 3, 6, 12, 24,..... 5, 10, 20, 40,..... 7, 14, 28, 56,..... (Russell, 1974, p. 90-92).



Como essas séries são progressões de progressões, o número serial é ômega ao quadrado. O processo pode prosseguir indefinidamente obtendo a classe composta de: Ômega elevado à segunda potência, à terceira, à quarta, etc. até Ômega elevado a Ômega. O fato mais marcante de toda essa construção é que a estrutura de ordem do conjunto gerador é sempre transmitida para o conjunto gerado. Russell mostra detalhadamente a transmissão dessas propriedades no capítulo sexto (Similaridade das relações) de sua obra, *Introdução à filosofia matemática*. Esse autor, depois de uma longa exposição onde retoma conceitos explicados anteriormente, conclui: “Portanto, se uma [das relações] é serial a outra também será serial” (Russell, 1974, p. 58). Cassirer comenta esse processo gerador através da série de potências de ômega.

“E esses [os tipos de ordem] não são assim introduzidos como meros símbolos arbitrários, mas são sinais de determinações e diferenças conceituais, que são realmente dadas e que podem ser com precisão apontadas no campo dos infinitos grupos. A forma de *enumeração* também é a única expressão de uma necessária diferenciação lógica, que é a primeira a ganhar adequada interpretação lógica nessa forma” (SF: 64).

Esse processo gerador é também aplicado aos números transfinitos<sup>18</sup>. Para Cassirer, com esse expediente os problemas com o infinito atual tornam-se irrelevantes. O conflito entre os conceitos de infinitude e realidade não está aqui instalado, pois, todas as construções são ideais. Os números transfinitos são de natureza lógico-conceitual e, portanto, podem ser considerados infinitos sem nenhum problema. Esse conceito está realmente livre da enumeração com o o

---

<sup>18</sup> Para Cantor, o número de pontos que há em um segmento é dado por dois elevado a *alef-zero* que é o cardinal do conjunto dos números naturais. *Alef-zero* é seguido por *alef-um* e assim

termo é entendido no sentido ordinário. Sob esse aspecto, a aritmética “transfinita” foge aos processos usuais. Nesse caso, Cassirer endossa Cantor:

“Cantor expressamente distingue a ‘função lógica’ sobre a qual o transfinito é baseado do processo de sucessivas construções e sínteses de unidades. O número  $\omega$  não é o resultado de uma perpétua adição renovada de elementos particulares, mas é um meio para ser meramente uma expressão para o fato que, o completo e ilimitado sistema de números naturais, no qual não há último número, é dado em sua natural sucessão de acordo com sua lei” (SF: 65).

A função aqui representada é definida por Cantor como sendo o segundo princípio da geração de números. Esse princípio é frutífero não apenas porque é uma nova maneira de gerar números, mas, principalmente, porque ele conduz o pensamento na sua inevitável tendência de apoiar-se em número. Assim, como esse número engloba toda a multiplicidade que lhe é anterior, ele é o ponto inicial que gera uma multiplicidade similar àquela que ele representa.

“Para o pensamento matemático, a relação fundamental que inclui dentro de si todos os membros que procedem dela, a torna um novo elemento, uma espécie de unidade fundamental da qual uma nova forma de construção de números tem seu ponto de partida. A totalidade sem fim dos números naturais, na medida que é dada por uma lei, isto é, na medida que é tratada como unidade, torna-se um ponto de partida para uma nova construção. De uma primeira ordem surgem outras mais complexas que usam a primeira como material básico. Mais uma vez mais vemos a liberação do conceito de número como uma coleção de unidades. Tentar entender o número  $\omega$  como um agregado de unidades individuais, seria um contra-senso e negaria o seu conceito essencial” (SF: 66).

Vale salientar que, como se mencionou anteriormente, a ordem pertencente ao conjunto original é transmitida ao novo conjunto gerado. Porém, a “sucessão”

---

sucessivamente formando o conjunto dos números transfinitos. Esses números estabelecem uma

estabelecida por essa ordem não está ligada à sucessão temporal. Nela há apenas uma sequência lógica (SF: 67). Essa interpretação deve nortear a relação entre os números finitos e transfinitos. O fato do número  $\omega$  vir depois dos números finitos (conjunto dos números naturais)<sup>19</sup>, significa apenas uma dependência na ordem da fundamentação dos números. Os números que vieram posteriormente aos números naturais, tais como: negativos, irracionais, transfinitos não são, como alguns querem, simplesmente adicionados ao sistema. Eles são gerados por um desdobramento contínuo da função lógica que já está contida no conjunto inicial. Esse é o primeiro princípio da geração de número. Por isso, para Cassirer, o interesse não é mais a fundamentação das leis gerais de uma única série, mas “a unificação de uma pluralidade de séries, das quais cada uma é dada por uma definida relação geradora” (SF: 67).

### **2.2.3 A posição de Cassirer sobre o conceito de número**

Cassirer concorda com Frege em sua refutação à teoria de Mil, porém, a presença do elemento sensível na dedução do número não é totalmente descartada. Sua participação deve sim, ser claramente identificada. Para entendê-la, pode-se partir de um conceito geral qualquer. Quando se vê um objeto triangular, percebe-se algo sensorial que corresponde à palavra três. “Alguma coisa não sensorial [a noção de três] teria algo sensorial como propriedade”. Comenta Cassirer a citação de Frege: “Nós não vemos três imediatamente nela [a palavra triangular], mas vemos alguma coisa que uma atividade intelectual pode

---

hierarquia entre os diversos tipos de infinitos (Tiles, 2004, p. 1).

<sup>19</sup> Cantor considerava o conjunto dos números naturais como “números finitos”, porém variável. Para ele, infinitos verdadeiros são os conjuntos dos números transfinitos (EPC: 90 e 91 Vol. IV).

captar e que conduz a um julgamento no qual o número três aparece” (SF: 30). Esse julgamento, que aparece na dedução de número, é o responsável pelo encobrimento de muitos absurdos que a posição de Mill acarreta. Para Cassirer, admitir que verdades aritméticas mais complexas seriam simples generalizações de verdades mais elementares, estabelecidas por observações de objetos físicos, além de não resolver os problemas já existentes, criam outros.

O conceito de número em Russell mostrou-se estritamente dependente do conceito de classes. Inicialmente, o autor define classe como uma multiplicidade de quaisquer indivíduos que apresentam uma característica ou qualidade comum. Russell definiu os números cardinais como “classes de classes”, aplicando esta definição, não sem problemas, ao **zero**, “classes das classes nulas”, e ao **um** “classes das classes unitárias”. Porém, o posicionamento de Russell em ligar números aos objetos concretos lhe causa problemas. O zero, como classe nula, não pode ser ligado a objetos concretos. O conceito de número deve ser estabelecido de maneira exclusivamente lógica. Isto significou igualar o número ao conceito de classe. Esse ponto de partida supõe a teoria tradicional da formação de conceitos na qual todos os objetos, reais ou ideais, estão submetidos às classificações de gênero e espécie. Se o interesse não está em um conceito geral de número, e sim no conceito de um determinado número, isto já constitui um problema, pois, resultaria em um conceito universal e não um conceito particular. Cassirer argumenta contra tal posição:

“Há somente um ‘dois’, somente um ‘quatro’ e ambos possuem certas propriedades matemáticas que não são compartilhadas com nenhum outro objeto. Se a redução de número ao conceito de classe é possível a despeito disto, então outra direção precisa ser tomada. Para determinar de acordo com sua pura essência, o que

um número 'é', não devemos tentar analisá-lo diretamente em suas partes constitutivas mais simples, mas perguntar primeiramente o que *significa igualdade de números*" (SF: 45).

De acordo com Ambrogio Giacomo Manno, "Russell cai num círculo vicioso: quer constituir os 'números' com base nas classes, enquanto as 'classes numéricas' exigem o número como base" (Manno, s. d., p. 88). Essa crítica é completamente refutada por Russell (Russell, 1974, p. 25). Entretanto, em realidade, podem ser percorridas classes equivalentes como se bem entender, que não ocorrerá a menor noção de número no sentido comum da palavra. Afirma Cassirer:

"O específico significado de 'quatro' ou 'sete' nunca poderia resultar do fato de colocar juntos alguns grupos de quatro ou sete elementos; os grupos individuais precisam primeiro ser colocados numa determinada sequência de elementos, com os números, no sentido da teoria ordinal" (SF: 48).

A teoria russelliana despreza a posição dos números, pois está interessada apenas na cardinalidade, ou seja, quantos elementos há no conjunto. Por isto, ela está em flagrante oposição à "teoria ordinal" que vê a essência do número determinada exclusivamente por sua posição. Cassirer enfatiza a dependência do conceito de número, do conceito de ordem:

"É uma característica fundamental da teoria ordinal, que nela, o número individual nunca significa alguma coisa por si só, mas um determinado valor é somente atribuído a ele por sua posição no sistema total. A definição de um número individual determina imediata e diretamente a relação que ele mantém com os outros números do campo; e essa relação não pode ser eliminada sem perda do inteiro conteúdo do particular conceito numérico. Na dedução geral de números cardinais que nós estamos examinando essa conexão é eliminada" (SF: 48).

Fica claro que a dedução russelliana dos números elimina a relação de um número com o todo. Essa relação, que é excluída da dedução do número, quando parte das classes similares, é exatamente a marca na qual o número tem a sua mais profunda raiz. Ademais, quanto aos números, o que os matemáticos estão realmente interessados são as propriedades que fundamentam os conjuntos numéricos. O que o número possa significar em si mesmo não vem ao caso. O interesse do matemático é o desenvolvimento do número em forma de progressão. E progressão é qualquer série em que são verificados os axiomas de Peano. Essa é uma boa definição, pois liga a progressão diretamente à sua fundamentação axiomática. Os axiomas de Peano apresentam, em linguagem formal, as propriedades das sequências-ômega que são geradas pelo número ordinal do mesmo nome (Silva, 2007, p.198).

Suposto isto, a teoria ordinal dos números apresenta uma maior simplicidade lógica em relação a teoria cardinal que foi estabelecida pelo expediente das classes similares. A determinação dos números cardinais pela equivalência de classes pressupõe a existência dessas classes como pluralidade, e que elas tenham uma relação entre si com uma correspondência biunívoca entre seus membros. Desse processo nascem os números cardinais. Os números, na “teoria ordinal”, podem ser estabelecidos sem a passagem pela equivalência das classes. Para isto, basta apenas assumir a possibilidade de **diferença** e uma **sequência** de construções puramente mental, pelas diferentes relações a um certo elemento tomado com **ponto de partida**. Assim, a “teoria ordinal” pressupõe o **mínimo** como base inicial. Toda teoria lógica da formação dos números deve

supor algo como ponto de partida. Sendo assim, que essa base seja a mais simples possível (SF: 53).

Comparando as teorias que se candidatam a definir número, constata-se uma disputa semelhante àquela verificada entre a formação de conceito genérico e do conceito relacional, abordada no capítulo anterior. A “teoria cardinal”, pelo seu percurso através da equivalência das classes, não consegue remover os obstáculos sérios que aparecem, pois as objeções abordadas anteriormente evidenciam isso. Seu fracasso confirma a falta de adequação da teoria do conceito genérico como base para uma teoria do conhecimento aceitável. Se a teoria cardinal saísse plenamente vitoriosa em face das objeções que lhe são lançadas, então a teoria do conceito genérico estaria justificada, é o que infere Cassirer. Isso implicaria que o alvo de todo conhecimento seria uma ordenação de coisas individuais em uma hierarquia de espécies. Segundo Cassirer, a conexão entre a “teoria cardinal” e a teoria da formação de conceitos genéricos tradicional, é bem clara.

“Frege e Russell consideram com mérito decisivo de suas doutrinas, que nelas, número não aparece como uma propriedade de coisas físicas, mas com uma afirmativa que diz respeito a certas propriedades de classes; que nelas, portanto, os objetos não entram na base de juízos numéricos, mas antes os conceitos destes objetos. É incontestável que, comparada com a interpretação sensorial, uma extraordinária liberação do pensamento e aumento da profundidade é conquistada por esta transformação. Não obstante, ela não é suficiente para enfatizar o caráter puramente conceitual das afirmativas numéricas, uma vez que, conceitos de coisas e conceitos funcionais são colocados no mesmo plano. Número aparece, de acordo com essa visão, não como a expressão da condição fundamental que primeiro torna possível toda pluralidade, mas como uma ‘marca’ que pertence à dada pluralidade de classes e que pode ser separada dessa última por comparação. Assim, a deficiência fundamental da doutrina da abstração é repetida” (SF: 53 e 54).

De acordo com as afirmações anteriores, Cassirer considera fracassada a teoria de Russell e consequentemente a de Frege. Disto, ele infere uma prova adicional contra a teoria aristotélica da formação de conceitos. Em Frege, no que tange ao conceito de número, Cassirer abona apenas os argumentos que esse produziu contra Mill, sem, contudo, concordar com uma completa eliminação da intuição na formação do conceito.

Para melhor elucidar a posição de Cassirer sobre número, Kant será explorado como ponto de partida. O filósofo de Königsberg estabeleceu o seguinte conceito de número:

“O *esquema* puro da *quantidade* (*quantitatis*) como conceito do entendimento é, contudo, o *número*, que é uma representação que enfeixa a sucessiva adição de um a um (homogêneos). Portanto, o número não é senão a unidade da síntese do múltiplo de uma intuição homogênea em geral, mediante o fato de que produziu o próprio tempo na apreensão da intuição” (Kant, 1999, p. 147).

Nessa definição, o “entendimento” e um processo criativo de síntese são enfatizados por alguns, ao passo que, outros enfatizam a “sensibilidade” e a intuição irracional. Cassirer se alinha aos integrantes da primeira interpretação opondo-se àqueles pensadores que desenvolvem a segunda posição ; a saber, os representantes do empirismo, intuicionismo e lógicos aristotélicos (Smart, 1958, p. 243). Para Cassirer, o conceito de número não é a origem e base da aritmética. Harold R. Smart enfatiza: “Tomemos, por exemplo, o conceito de número que Cassirer significativamente declara não ser a mera base da ciência especial da matemática, mas a ‘primeira e verdadeira expressão do método racional em geral’”



(Smart, 1958, p. 242 e 243). Bem como o uso subsequente das séries numéricas feitos por ele:

“Na linguagem kantiana, a atividade sintética do conhecimento é um processo que gera relações, isto é, conhecer é relacionar, e relacionar, assim Cassirer continua, é introduzir ordem em uma multiplicidade ou séries; e ordem serial, nesse estrito sentido da palavra, encontra a sua primeira e fundamental expressão nas séries dos números ordinais. O idealismo lógico e crítico mantém, em resumo, que nada há de mais último para o pensamento do que pensar a si mesmo, e pensar consiste em estabelecer relações (*das Beziehungssetzen*)” (Smart, 1958, p. 244).

Smart aqui enfatiza a categoria relação kantiana na qual Cassirer introduz a ordem através de séries ligando pensamento relacional e números. Daí a importância da “teoria ordinal”.

Todo o percurso que Cassirer faz na história da matemática, no que tange o conceito de número, visa defender a posição que, números ordinais precedem, do ponto de vista lógico, os cardinais. Por outro lado, ele reconhece que a posição ordinal não resolve todo o problema, pois chega a afirmar: “Fundamental como é o momento conceitual de ordem, todavia ele não exaure o completo conteúdo do conceito de número” (SF: 41).

Uma vez que a intuição não era mais inteiramente confiável, como ficou patente com a legitimidade das geometrias não-euclidianas, igualmente, o conceito de número também não poderia ser fundamentado na intuição como queria Mill. Para fundamentá-lo, deve-se usar exclusivamente premissas lógicas, como pensa Dedekind:

“O conceito de número segue sendo, a partir deste ponto de vista, uma emanção direta das leis puras do pensamento, já que a função fundamental do pensamento consiste precisamente na operação de relacionar umas coisas com outras, fazendo uma coisa corresponder à

outra ou que reproduza ou copie a outra, função sem a qual não seria possível pensamento algum” (Dedekind *apud* Cassirer, EPC: 100 Vol. IV).

Cassirer comenta essa passagem:

“O ponto de partida aqui parece ser a doutrina da pluralidade das *coisas* da lógica tradicional e o poder da mente de copiá-las; não obstante torna-se evidente, com um entendimento mais aprofundado, que os velhos termos ganharam uma nova importância e novo significado” (SF: 36).

Conforme Cassirer, o termo “coisas” que Dedekind usa não deve ser entendido como objetos separados, e considerados como anteriores a qualquer relação. O termo “coisas” é de uma relação e não pode aparecer isoladamente, somente numa coleção ideal. De igual modo, o termo “copiar” tem uma nova acepção. Ele significa um processo de transformação e não uma mera reprodução. Não se trata de uma cópia das impressões externas. Esse processo de “copiar” é um arranjo intelectual. “O ‘copiar’ não produz uma nova coisa, mas sim, uma nova e necessária *ordem* entre as operações do pensamento e os objetos do pensamento” (SF: 36).

A certeza que o número oferece descansa sobre a relação, ou seja, a posição de cada número no sistema é determinada pelos demais. Disso decorre a prioridade da ordinalidade. Dedekind, em *Qué son y para qué sirven los números?* estabelece, por “abstração”, o conjunto dos números naturais. A palavra abstração é usada com um sentido completamente novo. Não significa a separação de uma qualidade da coisa submetida à essa operação. O processo abstrativo, nessa acepção, visa trazer à consciência o significado de uma certa relação, independente de todos os casos particulares, onde ela possa aparecer. Assim,

Cassirer aponta a real função do número. Toda a diversidade a que ele está ligado deve ser desconsiderada, para que fique evidente o caráter dessa função. Desse modo, a abstração ganha novo e real significado. Essa posição é importante porque descarta toda a pressão psicológica sobre a corrente subjetiva da apresentação. A dedução de número feita por Dedekind é baseada, não no seu conteúdo, mas em sua posição, por isso ele é criticado. Quando se alega que um número deve apresentar uma propriedade “interior” para se distinguir do outro, como, por exemplo, um instante no tempo difere do outro, Dedekind responde que o conteúdo “interno” de um número é a sua relação. Cassirer expressa esta idéia claramente: “A ‘essência’ dos números é **completamente** expressa em suas posições” (SF: 39). A ordem entre os números não vem deles entre si. “O ‘três’ não segue o ‘dois’ como o trovão ao relâmpago, nenhum deles possui qualquer espécie de realidade temporal, mas meramente uma constituição lógica ideal” (SF: 40).

Os números são construídos de uma maneira puramente intelectual, mas, tem como consequência, uma importante aplicação à pluralidade e ao processo de contagem. O último número natural de um conjunto completo listado em ordem não expressa apenas sua posição, mas também a cardinalidade desse conjunto, ou seja, o número de elementos que ele possui. Cassirer faz referência em nota de pé de página ao teorema (parágrafo 161), demonstrado por Dedekind em sua obra: *Qué son y para qué sirven los números?* Nesse teorema fica fundamentada a transição da ordinalidade para a cardinalidade.

“O número  $n$ , que foi primeiramente considerado como caracterizando o último elemento, pode assim ser

considerado, de outro ponto de vista, como característico de todo o sistema: nós podemos chamá-lo de número cardinal do sistema considerado e agora dissemos que o sistema consiste de  $n$  elementos” (SF: 41).

A partir da posição de um número, em um conjunto finito e ordenado, deriva a cardinalidade desse conjunto. A ordem, não derivada da impressão dos sentidos, mas exclusivamente por relações inerentes ao intelecto, produz símbolos correspondentes a objetos concretos. O fato é que, “símbolo” não deve ser entendido como uma “cópia” das coisas, e sim como uma relação entre as idéias que correspondem às coisas.

Cassirer lembra Gottfried Leibniz (1646-1716): “A ‘base’ da verdade, como ele [Leibniz] cita, nunca está no símbolo, mas nas relações objetivas entre as idéias” (SF: 43). Uma aritmética baseada apenas em símbolos seria falsa, como prova Frege em: *Os fundamentos da aritmética*.

No século dezanove, graças aos trabalhos de vários matemáticos elaborou-se uma teoria unificada dos números. Essa teoria demonstra que, tanto os números mais elaborados, bem como todas as operações a que eles são submetidos, podem ser definidos com base nos números naturais e nas operações que se lhe atribuem. Dentro dessa teoria, os números perdem toda sua auréola de mistério. Com esta redução de qualquer espécie de números, aos naturais muito se ganhou, pois todas as perplexidades filosóficas geradas pelos diversos tipos de números se concentraram agora, nos naturais (EPC: 104 Vol. IV).

Giuseppe Peano (1858-1932) juntamente com Dedekind apresentou as leis que regem os números naturais através de cinco axiomas . O quinto axioma é de fundamental importância, pois, estabelece a indução matemática que assim se expressa:

- 1) a função que se quer provar deverá ser verdadeira para o argumento **um**;
- 2) supõe-se que ela seja verdadeira para um valor **k** qualquer. (hipótese de indução);
- 3) prova-se que, valendo para **f(k)**, também será verdadeira para **f(k+1)**.

Verificados esses três passos, a função será válida para todos os valores naturais do seu argumento. Essa “indução” nada tem a ver com qualquer generalização empírica onde, no final, executa-se um “salto” injustificado. Além disso, a indução matemática, também denominada de indução completa, não é lógica no sentido clássico do termo. Cassirer concorda com Henri Poincaré (1860-1934) que afirmou ser essa “regra” “o verdadeiro tipo de um juízo sintético *a priori*”. Ela é a base da “verdadeira síntese *a priori*” (FFS: 439). Poincaré salienta que o sucesso da “regra” se deve a ela não fazer referência “à natureza das coisas”, mas à “capacidade fundamental do nosso espírito” (EPC: 116 Vol. IV).

Cassirer igualmente se faz porta voz do matemático Hermann Weyl (1885 - 1955). “Também Weyl insiste em que a ‘indução completa’ introduz na demonstração matemática um fator completamente novo, peculiar e alheio à lógica aristotélica, pois, nela reside “a verdadeira alma da arte probatória das matemáticas” (EPC: 117 Vol. IV).

A indução matemática, de fato, não tem origem empírica e não é derivada dos princípios de identidade ou contradição da lógica clássica. Quanto ao *a priori* matemático, Cassirer afirma:

“O caráter apriorístico dos juízos matemáticos e sua ‘evidência’ específica não podem ser fundamentados por meio de relações de coisas, senão somente por meios de postulações puras, isto é, relações que se baseiam em funções de postulação de unidade e postulação de diversidade, de ordenação e de correlação” (FFS: 439).

Explicitado o juízo sintético *a priori* na aritmética, analisa-se agora, de forma geral, o *a priori* em Cassirer.

Kant foi, sem dúvida, um divisor de águas na filosofia com sua distinção radical entre fenômeno e a coisa em si, e, respondeu ao ceticismo de Hume que tanto o incomodava. Há uma conexão necessária entre os fenômenos, assim como, a que há entre as idéias. Essa é, em essência, a questão do *a priori* que fundamenta o kantismo. A certeza apodídica na conexão das idéias impera também no mundo dos fenômenos. Assim, Hume teria sido respondido. No entanto, os avanços na matemática, física e lógica lançaram sérias dúvidas sobre o *a priori* kantiano (Porta, 2004, p. 134).

Como Cassirer é um herdeiro de Kant deve-se explicitar o seu redimensionamento do *a priori* kantiano. O tema não é simples, pois, sua posição sobre o assunto é apresentada de forma diluída em sua vasta obra. Tomam-se de início as palavras de I. K. Stephens:

“A doutrina de Kant sobre o *a priori* e a ingenuidade com a qual ele a aplicou na tentativa de resolver o problema de Hume parece ser para Cassirer, com tem sido para muitos outros kantianos, uma fonte de inspiração e guia útil na formulação de sua própria doutrina do *a priori*. Como ele mesmo colocou, ele vê em Kant ‘ não um fim, mas um

sempre novo e frutífero começo para a crítica do conhecimento' ” (Stephens, 1958, p. 153).

O que Cassirer vê em Kant, não é o coroamento final da crítica do conhecimento, mas sim um começo promissor para a ampliação dessa crítica. Para Cassirer, a tarefa maior da filosofia é fazer uma análise crítica do conhecimento, ligada à uma explicação do *a priori*. Em Cassirer, o *a priori* apresenta duas fases distintas de desenvolvimento. A primeira é a fase de *Substance and function* (1910), e a segunda prende-se à *Filosofia das formas simbólicas* (1923). Na primeira fase a fundamentação do *a priori* é estabelecida através de uma análise crítica da história do desenvolvimento da física e da matemática. Nesse momento, a doutrina do *a priori* é intimamente ligada à teoria da construção dos conceitos em matemática. Na aritmética, a aprioridade é encontrada na indução matemática; na geometria, na teoria dos invariantes. Assim, Cassirer aprofunda a aprioridade kantiana tanto no aspecto temporal com o no espacial.

A segunda fase da fundamentação do *a priori* encontra-se em uma obra posterior: *A filosofia das formas simbólicas* (1915-1923), onde é apresentada uma análise crítica da cultura como um todo.

A presente pesquisa apenas focaliza a primeira fase da fundamentação do *a priori*, que é instrumento indispensável para o conhecimento nas ciências exatas.

Cassirer concorda com Kant que o *a priori* deve somente ser deduzido a partir de uma análise crítica do conhecimento. Deduzi-lo de um princípio

fundamental é impossível, por não se ter a condição de apresentar seus limites, ou seja, a impossibilidade de definir onde ele começa nem onde termina.

A grande questão que surge ao rastrear o *a priori* através da análise do desenvolvimento do conhecimento, é estabelecer um critério que o identifique quando ele aparece. Para Cassirer, o processo é claro, pois o *a priori* é um elemento da “forma” que sempre está presente no processo criativo da mente e que permanece invariável através das variações do conteúdo da experiência. Em *Substance and function* (1910), Cassirer faz uma análise crítica do desenvolvimento da matemática, física e química trazendo à tona a forma invariante que jaz através das diversas etapas de desenvolvimento dessas ciências. Esse elemento invariante e formal é exatamente o *a priori* para Cassirer.

Kant deduziu seu *a priori* considerando a mecânica de Newton como o estágio último e definitivo da física. Entretanto, para Cassirer, o que é estabelecido em um dado estágio de desenvolvimento da ciência é inadequado para traduzir um estágio posterior. Um sistema de conceitos que estabelec um nível mais alto no avanço da ciência, ao substituir o sistema anterior não o aniquila totalmente, pois, algo permanece. Entre um estágio e outro há uma conexão lógica, e o que é preservado transforma-se em “um tribunal comum” a que ambos estão sujeitos. Esse tribunal consiste no conjunto dos elementos do “supremo princípio da experiência em geral”.

Já que, tratando-se do *a priori* os sistemas não podem ser comparados com os fatos, só podem então ser comparados com outros sistemas e, para essa progressiva comparação é necessário um constante padrão de medida dos princípios supremos da experiência em geral (SF: 268).



As formas constituem os elementos *a priori* do conhecimento, uma vez que, são os últimos fundamentos de toda determinação de uma conexão em geral, de acordo com a lei natural (Stephens, 1958, p.157 e 158). Para Cassirer, a tarefa da ciência é descobrir esses conceitos, e o método da descoberta é o mesmo usado na matemática.

A unidade, no fluxo sensorial da experiência, só pode ser obtida através dessas formas transcendentais. A aplicação dessas formas traz aos fenômenos através da experiência, o mesmo grau de necessidade e universalidade atingido nas proposições matemáticas. Assim, os objetos não são conhecidos como objetos dados, mas, conhecidos objetivamente pela produção e fixação de certos limites dos elementos constantes dentro do fluxo da experiência.

Estabelecido corretamente o conceito relacional de número, vale dizer; uma posição dentro de uma estrutura serial pode se gerar outras séries com as mesmas propriedades da série geradora. A tarefa de Cassirer volta agora para o conceito matemático de espaço que está ligado à realidade externa. Com esse expediente, abre-se o caminho para a próxima abordagem que será a formação dos conceitos das ciências naturais exatas. A questão agora levantada é: como o número, que surgiu na “pureza” das “constantes lógicas”, é aplicado a coisas concretas do mundo externo com sucesso? Esse é o lado epistemológico do problema da fundamentação do número, que, foi negligenciado pelos matemáticos envolvidos na sua fundamentação. Não perceberam que o número pode “converter em um verdadeiro princípio de conhecimento desse mundo” (EPC: 117 Vol. IV). Segundo Cassirer, para dar conta dessa questão, a matemática tem que

ampliar seu raio de ação em direção “à lógica das ciências naturais exatas” (EPC: 118 Vol. IV).

## 2.3 Espaço e geometria

### 2.3.1 Geometrias

O conceito de número adotado por Cassirer norteou-se pela desvinculação de qualquer objeto concreto, assim, nele, não há nenhuma correlação imediata aos objetos físicos, mas para se atingir a concreta realidade deve-se lançar mão do modelo da pura forma da geometria, o espaço. “Precisamente aqui se encontra a decisão crítica para toda teoria lógica do conceito” (SF: 68). Cassirer então segue essa direção enfatizando que o conhecimento sintético *a priori* constatado até aqui, na aritmética, também aparece na geometria; precisamente no caráter primitivo do espaço (EPC: 79 Vol. IV).

Em sua origem, na Babilônia e Egito, os conhecimentos geométricos tinham um caráter eminentemente prático (Eves, 2004, p. 60 e 67). Diferentemente, para os gregos, as verdades geométricas passaram a ser objeto de especulação teórica com Tales de Mileto (Eves, 2004, p. 129). O interesse dos pensadores gregos pela geometria levou-os ao conceito de medida desvinculado de aspectos empíricos e pragmáticos. Esse conceito era a chave para a descoberta do “tesouro oculto da geometria” (EPC: 74 Vol. IV). Essa atitude foi evidentemente influenciada pela concepção do mundo como um cosmo, isto é, um caos no qual foi aplicada a medida. De forma elementar, medida<sup>20</sup> é uma relação entre a grandeza a ser mensurada e uma unidade arbitrária qualquer. Além disso,

para alguns filósofos, a medida era um critério, um cânon para medir o bem. Platão, no *Filebo*, viu na medida, a ordem e harmonia das coisas ( *Fil.* 24 c-d). Para Aristóteles, a medida é o cânon das virtudes éticas ( *Et. Nic.* III, 4, 1113 a 33). Essas referências comprovam que o pensamento grego clássico sobre o conceito de medida excedia, em muito, ao seu aspecto empírico e prático.

Cassirer chama atenção para mudança de orientação com relação ao conceito de medida, no Renascimento :

“O conceito de medida conservou ao longo dos séculos essa primazia no pensamento matemático e filosófico. Só a partir do Renascimento começa a manifestar-se na orientação intelectual das matemáticas uma mudança que, não desprezando a importância do conceito, deixa de ver nele o objeto exclusivo, e, o único foco do qual se irradia o saber metódico” (EPC: 74 e 75 Vol. IV).

A definição da matemática como ciência das grandezas e das formas, que vinha desde a antiguidade clássica, hoje, já não é mais sustentável. Atualmente, a matemática deve ser considerada a **ciência das relações**; o que indica sua estreita ligação com a lógica.

Especialmente, em geometria, para Leibniz, a orientação projetiva deveria se impor à orientação métrica. A geometria projetiva seria uma linguagem puramente universal e abarcaria as demais geometrias, como casos particulares. Dentro dessa visão, o conceito de medida passa para um plano secundário e, em primeiro plano, aparece o conceito de **ordem**. O modelo que a construção de conceitos científicos deve seguir torna-se agora, evidente na geometria.

Cassirer remontando aos primórdios da filosofia clássica afirma: “*Conceito e forma* são sinônimos; eles estavam unidos sem distinção no significado de *eidos*”

---

<sup>20</sup> Em matemática, a teoria geral sobre medidas é um capítulo da topologia.

(SF: 68). Assim toda multiplicidade sensível externa é ordenada através das formas espaciais. A construção dos conceitos se faz agora através das formas geométricas que passam ser a expressão e confirmação daquilo que é intuitivo. Para Cassirer, nova confirmação da formação do conceito genérico aqui se apresenta. “O princípio da lógica do conceito genérico é confirmado de um novo ângulo; e, dessa vez, ele não é uma visão popular do mundo, nem a estrutura gramatical da linguagem, mas uma estrutura da ciência matemática sobre a qual ele fundamentalmente descansa” (SF: 69).

Através da geometria as formas de vários objetos podem ser reconhecidas, e possibilitam a elevação dessas percepções ao gênero que subsume todos esses esboços geométricos particulares.

O caminho percorrido na formação do conceito de número, agora deve ser feito nos domínios da geometria. Cada elemento na geometria clássica apresenta uma “essência” bem definida. Seu conceito genérico é obtido quando essa “essência” é atingida. Tudo isso pressupõe uma inalterabilidade desses elementos.

Há autores que acusam a matemática grega de ignorar o problema do movimento. Segundo Cassirer, excetuando Euclides, isso não corresponde à realidade grega de um modo geral. “A visão, em verdade, que o problema da mudança era em geral alheio ao espírito da matemática dos Gregos, tem sido completamente refutado pelas investigações de fontes históricas” (SF: 69).

As curvas: círculo, elipse, parábola e hipérbole, por suas expressões visuais, não poderiam pertencer a um conceito único. A geometria prova resultados específicos para cada uma delas, mas, isto só é possível porque todas

elas são derivadas do conceito de secções cônicas fornecedoras de uma estrutura geral para todas. Elas têm propriedades particulares diferentes, mas, tudo isso está inserido dentro da mesma estrutura geral.

Como a geometria clássica considerou os entes geométricos isoladamente, havia uma necessidade de sanar esse defeito. Um novo método de tratamento das figuras geométricas começou com Pierre De Fermat (1601-1665), mas foi com René Descartes (1596-1650), que ele adquiriu uma maior expressão (Eves, 2004, p. 389). Esse trabalho é hoje conhecido como Geometria Analítica.

Poderia parecer que a fixidez das figuras na geometria clássica proporcionaria uma melhor abordagem para a captação do “conteúdo geométrico” das mesmas, mas, isto é enganoso.

Uma solução inicial é a cartesiana. Descartes desenvolveu sua geometria analítica tendo por conceito fundamental o movimento. Não se trata do movimento empírico dos corpos que a fixidez da geometria clássica procurava evitar. No plano cartesiano, o ponto “move” descrevendo as curvas planas através de combinações de movimentos verticais e horizontais. Quaisquer movimentos são assim reduzidos a esses dois movimentos básicos que são assinalados em uma série numérica nos eixos referenciais  $x$  e  $y$ . Trata-se de um movimento ideal. Dentro desse sistema, o conceito de movimento é ligado ao conceito de número. Conforme relata Cassirer:

“Aqui, o conceito de movimento, como anteriormente o conceito de número, serve simplesmente como um exemplo do conceito geral de série. O ponto individual do plano é primeiro determinado por sua distância a duas linhas fixas e ganha aqui seu lugar sistemático dentro da totalidade das posições possíveis. Esses pontos individualizados que são caracterizados por valores

numéricos definidos, não estão meramente próximos um do outro, mas são diferentemente ligados de acordo com várias regras complexas de arranjos, e, são assim trazidos unificados em formas. A representação do 'movimento' dos pontos é somente um símbolo sensorial desse ato lógico de arranjo" (SF: 72 e 73).

No gráfico, o movimento do ponto seguindo o formato da curva não é uma **cópia** do movimento empírico, que é aqui anulado para que possa surgir em seu lugar uma lei serial aritmetizada. Esse expediente "traduz" o movimento empírico em uma função matemática no domínio dos números inteiros. Com todo avanço alcançado até aqui, o que Descartes conseguiu era ainda limitado. Porém, quando os eixos cartesianos tornaram-se eixos reais, isto é, contendo todos os números reais; a geometria analítica avançou para uma geometria diferencial, possibilitando estudar as propriedades locais de curvas e superfícies. O fato de existir uma infinidade de pontos entre dois pontos quaisquer, por mais próximos que estejam não é um impedimento para determinar a curva. Cassirer afirma:

"No avanço para a geometria diferencial aparece um novo e decisivo momento. É uma multiplicidade *infinita* de correspondência que produz a curva com um conceito do todo. O método de análise infinitesimal claramente mostra, de início, que essa infinidade de determinação não destrói toda a determinidade, mas que é possível antes unificar as determinações de novo em uma concepção geométrica" (SF: 74).

Na geometria analítica, cada ponto do plano é determinado por um par ordenado de números chamado de coordenadas do ponto. Na geometria diferencial, os infinitos pontos compreendidos entre dois pontos quaisquer são determinados por um número infinito de coordenadas que são relacionadas através das equações diferenciais. Nessas equações, uma função se relaciona com uma ou mais de suas derivadas. Quando ela é de primeira ordem o

relacionamento é apenas com a derivada primeira. Se de segunda ordem, com a derivada primeira e segunda e assim sucessivamente. Estas equações se expressam assim:  $F(x, y, y') = 0$  e  $F(x, y, y', y'') = 0$ . Onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas da função primitiva e  $y'$  e  $y''$  são respectivamente as derivadas primeira e segunda de  $y$  em relação a  $x$ . A partir da derivada, pelo processo de integração descobre-se a função que a gerou, ou seja, a função primitiva. Entende-se por derivada a taxa de variação de um fenômeno qualquer. O conceito de universal como contendo todos os casos particulares, com visto no primeiro capítulo, tem inspiração nesse processo de integração (Cohen, 1977, p. 102). Exemplo: Quando é integrada a função velocidade, recupera-se a função primitiva, ou seja, a função horária entre o espaço e o tempo. A velocidade é assim uma relação de dependência entre uma série infinita de valores do espaço correspondendo a uma série infinita de valores de tempo. Cassirer conclui enfatizando o ponto de vista relacional do processo. “Logicamente considerada, a velocidade não é uma propriedade absoluta de algo que move, mas meramente uma expressão dessa relação recíproca de dependência” (SF: 75).

Isso não significa que se está estabelecendo uma indicação de movimento real, e sim, traçando a trajetória ideal de um ponto através das leis das correspondências entre valores do espaço e do tempo. Assim, a “velocidade” é introduzida na geometria através do processo de integração que permite computar infinitos pontos de uma série espacial, que correspondem aos infinitos pontos de uma série temporal. Por isso o cálculo infinitesimal enseja um tratamento adequado para a questão do infinito a tual.

O aparecimento das geometrias não-euclidianas abriu o caminho para a possibilidade da existência de várias geometrias. A criação da geometria projetiva se deve aos trabalhos de Jean Victor Poncelet (1788 -1867), que, em sua obra, *Traité des propriétés projectives des figures* apresentou os fundamentos dessa geometria.

A geometria projetiva pode ser considerada com uma ampliação da euclidiana na qual são acrescentados os elementos ditos impróprios. Com a inserção desses elementos, o espaço euclidiano passa a ser um espaço projetivo (Eves, 2004, p. 590 e 591). O método usado nessa geometria consiste num emprego generalizado de perspectivas e de secções planas nas transformações geométricas. A representação de uma figura sobre outra se denomina transformação projetiva.

A geometria projetiva tem por objeto as proposições que expressam as propriedades invariáveis nas transformações projetivas, e, isso é o que caracteriza o conteúdo geométrico da figura. Essas propriedades invariáveis são os determinantes do conteúdo geométrico.

Contrapondo a geometria projetiva, está a geometria métrica que considera as propriedades das proposições quanto ao tamanho das figuras como invariantes. O movimento nessa geometria é rígido, isto é, na transladação, a figura não se deforma. Além de Poncelet, vários matemáticos contribuíram para tornar a geometria projetiva uma disciplina matemática pura. Porém, Karl G. C. Von Staudt (1798-1867), em sua "*Geometrie der Lage*", foi o primeiro a tornar a geometria projetiva livre de aspectos métricos, tais como: distância, ângulos, etc. (Eves, 2004, p. 594). Coube a Christian Felix Klein (1849-1925), através de seu



discurso *Erlanger Programm*, traçar os rumos dessa geometria independente de medidas. Com a posição de Klein há um avanço de uma geometria métrica para uma geometria de posição. Isso parece uma oposição à geometria analítica de Descartes que contempla as relações métricas nas figuras. Por isso, a intuição parece recobrar seus direitos, porém, seu uso mudou de foco. Esse novo uso é bem diferentes daquele que era empregado na geometria clássica. Trata-se do objeto sobre o qual ela atua, que não são mais figuras isoladas, e sim a relação que elas mantêm com o espaço puro. É uma abordagem tipicamente relacional. Assim, o caminho está aberto para atingir o espaço puro, ou seja, um conceito puro de forma. Cassirer afirma:

“Assim o desenvolvimento [da geometria moderna] nos levou de volta do conceito abstrato de número para o conceito puro da forma, que nela descansa um novo motivo, no sentido filosófico, o próprio Descartes descobriu e afirmou. Ele viu nos métodos de Desargues, que contém a primeira abordagem para um tratamento projetivo e concepção de formas espaciais, uma indicação geral das ‘metafísicas da geometria’ ” (SF: 76).

Cassirer assim enfatiza, apoiando-se em Descartes, que a abordagem de Gérard Desargues (1591-1662), contém a “essência” da geometria, ou seja, a pura forma. Desargues contribuiu para a geometria projetiva com o seu teorema sobre o triângulo. Em síntese, trata-se do seguinte: Dados dois planos, que podem ser paralelos ou não, se for construído em um deles um triângulo qualquer e projeta do no outro através de uma projeção central, o prolongamento dos três lados de cada um dos triângulos sobre a reta comum aos dois planos (no caso de serem concorrentes), ou sobre uma reta qualquer fora desses planos (no caso de serem paralelos), incidirão sobre os mesmos pontos e na mesma **ordem** (Eves, 2004, p.

360). Essa ordem nunca varia, mesmo quando são alteradas as medidas dos lados do triângulo ou sua posição. Ela é, portanto um **invariante** nessa transformação projetiva.

O conteúdo geométrico agora fornecido pela intuição é completamente diferente daquele visado na geometria elementar. Quando se acompanha a disputa entre o uso da intuição nas duas geometrias nota-se claramente o novo uso da mesma. A intuição, na geometria projetiva, não é uma aderência ao que há de sensorial na figura dada, e sim uma livre geração da figura com princípios unificados.

“Os vários casos sensorialmente possíveis de uma figura não são, como na geometria grega, **individualmente** concebidos e investigados, mas todo o interesse é concentrado sobre a maneira na qual eles **mutuamente procedem um do outro**. Assim a ‘intuição’ não está interessada com a figura particular e seu conteúdo accidental, mas ela é, de acordo com Jakob Steiner, direcionada para a mediação de dependência das formas geométricas umas das outras” (SF: 78).

As propriedades descobertas por Poncelet atingem a “essência” das figuras e livram o matemático de procurar propriedades individuais nas mesmas. A dependência da forma sensorial é assim, banida no estudo da geometria. Descartes também pensou assim, mas foi Poncelet que levou a idéia às últimas consequências. As figuras individuais devem ser consideradas como ponto de partida para descoberta do seu verdadeiro conteúdo geométrico, ou seja, o conteúdo **invariante** de toda a família das figuras de determinado grupo. O que interessa agora aos matemáticos é a estrutura comum de todas as figuras que pertencem à mesma família, pois, essa estrutura é o princípio gerador das

propriedades das mesmas. A fundamentação de uma demonstração geométrica é realizada através desses invariantes do sistema, segundo o princípio de continuidade. Constata-se isto nas próprias palavras de Cassirer:

“A força e a conclusividade de uma prova geométrica sempre repousa então nos invariantes do sistema, não ao que é peculiar a membros individuais como tais. É esta interpretação que Poncelet caracteriza pela expressão *princípio de continuidade* e que ele formula mais precisamente como o *princípio de relações matemáticas*” (SF: 80).

Os conteúdos particulares nessas relações não são importantes. Depois de uma figura ser tomada como ponto de partida, passa-se por várias transformações previstas pelo método, suas propriedades invariantes ficam evidentes. Cada uma delas pode ser atribuída a qualquer fase da figura. Assim, uma propriedade individual está umbilicalmente ligada ao todo. Esse resultado é análogo ao obtido nas séries numéricas. O caso geral não negligencia os particulares. O geral, para Poncelet, não é apenas um agregado de particulares, mas as propriedades do gênero nas quais as coisas particulares estão ligadas. A conclusão desse universal é uma inferência das propriedades das conexões dos casos particulares para os objetos conectados. Essa inferência vai do princípio das séries aos membros de cada série (SF: 82).

Em síntese, o método da geometria projetiva procura separar os elementos métricos dos descritivos, que permanecem imutáveis através das projeções. Com isto, já se evidencia que a pertinência ou não de um elemento no conceito genérico não se dá pela similaridade das partes de uma figura, pois, o que permanece são os **invariantes**, e esses, não são percebidos sensorialmente nas

figuras das quais partimos. As transformações evidenciam o “grupo” ao qual as diferentes figuras pertencem.

“As formas, unidas dessa maneira num ‘grupo’, podem pertencer a ‘tipos’ totalmente diferentes em suas sensoriais estruturas intuitivas; na verdade, elas podem estar privadas de qualquer referência à semelhante tipo, de maneira que não há nenhuma existência geométrica correspondente a elas, no sentido da intuição direta” (SF: 82).

Dentre as projeções, há uma que pode ser chamada de imaginária. Através dela, algumas partes da figura desaparecem inteiramente. Dadas uma circunferência e uma reta que lhe é secante, pode-se submetê-las a várias projeções, de tal forma que, no final a reta secante apareça externa à circunferência. Nesse arranjo, a direção e os raios da circunferência determinados pela secante são expressos por valores imaginários. Cassirer faz essa constatação: “A correspondência da figura com o original não mais está ligada por elementos realmente presentes e observáveis, mas, meramente por elementos intelectivos; ela tem transformado em si mesma, uma pura *correlação ideal*” (SF: 83).

Cassirer mostra que a carência dessa correlação do ideal com o imaginário é exatamente o defeito da geometria clássica que considerava so mente grandezas absolutas nas figuras. Era como se a grandeza de uma figura apresentasse uma existência quase física. O real e o imaginário podem ser considerados dentro dessa perspectiva como elementos similares. Com eles, as verdadeiras relações geométricas podem ser expressas. O desaparecimento de elementos da figura através de projeções não deve ser considerado algo negativo, como se poderia pensar à primeira vista, pois o elemento imaginário serve para fazer a conexão

entre opostos reais que, mostrar-se-iam completamente heterogêneos e, por conseguinte, sem nenhuma ligação um com o outro. Assim, o imaginário “existe” e cumpre o seu papel de elemento de ligação entre elementos reais no sistema de proposições geométricas. Essa produção do imaginário através das projeções é, em princípio, do mesmo caráter que a produção de novas séries no reino do número.

Para se compreender a questão dos pontos imaginários parte-se da definição de potência de um ponto em relação a um círculo. Potência desse ponto é o produto da distância do mesmo até o primeiro ponto da secante ao círculo pela distância dele até o segundo ponto da mesma.

Outro conceito que será útil para compreender a questão dos pontos imaginários é o conceito de eixo radical de dois círculos. Define-se por eixo radical o lugar geométrico dos pontos que apresenta sempre a mesma potência em relação a dois círculos dados. Quando dois círculos secantes apresentam uma corda comum, e são submetidos a transformações projetivas, eles não mais se apresentam com secantes e uma reta perpendicular à reta que une o centro desses círculos é seu eixo radical. Nesse eixo, os pontos que anteriormente seccionava o círculo podem ser considerados como pontos imaginários. As projeções, nessa geometria, produzem assim, elementos que não são reais, mas possuem uma íntima conexão com os elementos reais.

É importante salientar que essa produção de elementos imaginários propicia a descoberta de propriedade que não são intuitivamente evidentes nas figuras reais.

Segundo a geometria projetiva, duas paralelas se encontram no infinito, no chamado ponto impróprio. Considerando apenas os aspectos lógicos, “ponto” não é uma coisa em si, é caracterizado apenas pelas proposições que o relaciona com os demais entes geométricos. Assim, pontos no infinito estão perfeitamente caracterizados e não representa contradição alguma compará-los aos pontos “reais”.

Do exposto pode-se concluir que, na geometria projetiva, pontos reais e não reais estão plenamente justificados.

A medida do comprimento de um segmento é a base da geometria métrica. Na geometria projetiva, a contrapartida desse aspecto é o conceito de razão dupla ou anarmônica de quatro pontos colineares. Dados quatro pontos A, B, C, D, sobre uma reta qualquer se define razão dupla como o quociente entre outras duas razões, a saber:  $AC/BC$  e  $AD/BD$ . A razão dupla não é um comprimento nem a divisão de dois comprimentos. É a razão de dois quocientes. A razão dupla ou anarmônica mostra-se um invariante quando os quatros pontos da reta são submetidos a projeções (Eves, 2004, p. 211).

Aqui se verifica o mesmo que aconteceu com o número ordinal, nada foi ligado às grandezas mensuráveis. A ordem dos pontos é concebida da mesma maneira que a dos números.

A geometria projetiva pode ser considerada como a ciência *a priori* do espaço. Confirmando a definição de Leibniz para o espaço: “a forma de ordenação de coexistência” (EPC: 57 Vol. IV).

A geometria projetiva só terá completa independência e unificação quando for derivada independentemente dos aspectos métricos decorrentes do teorema

da razão dupla. Para atingir esse objetivo, o teorema do quadrilátero completo ou de Staudt será utilizado. Esse “quadrilátero” é uma figura composta de quatro retas quaisquer, não congruentes três a três e dos seis pontos em que elas se interceptam. De cada intersecção dessas retas traçam-se três “diagonais”. Prolongando uma dessas diagonais sobre uma terceira, que foi previamente escolhida, será determinado um ponto harmônico entre os dois extremos dessa diagonal. E prolongada agora a terceira diagonal sobre o prolongamento da que foi previamente escolhida, será obtido um quarto ponto harmônico com os três anteriores. Cassirer afirma:

“Assim, sem qualquer aplicação de conceitos métricos, a relação fundamental da posição é estabelecida por um procedimento que usa meramente o traçado de retas. O ideal lógico de uma construção puramente projetiva da geometria é assim reduzido à mais simples exigência, ele seria preenchido mostrando a possibilidade de dedução de todos os pontos do espaço em determinada ordem como membro de uma totalidade sistemática por meio dessa relação fundamental e sua repetida aplicação” (SF: 86).

Todos os pontos do espaço projetivo serão gerados dessa maneira. A geração do espaço projetivo e a dos números apresentam o mesmo princípio. Quando da derivação dos números, partiu-se de uma unidade e de certas relações nas quais todos outros números são fixados em uma sequência ordenada, o mesmo também ocorre aqui na geometria projetiva. Cassirer cita Russell em *The foundation of geometry*, concluindo: “Nessa conexão [número e espaço] a geometria projetiva tem sido, com justiça, considerada uma ciência universal e *a priori* do espaço e deve se alinhar ao lado da aritmética em rigor dedutivo e pureza” (SF: 88).

No século vinte, a geometria projetiva recebeu vários tratamentos postulacionais, e isso deu ensejo ao aparecimento de diversos métodos geométricos. A classificação das diversas geometrias, segundo algum princípio, se fazia necessária. Uma classificação foi feita por Felix Klein em seu *Erlanger Programm*. Quando se usa a teoria de grupo para classificar as diversas espécies de geometrias, adquire-se uma importante perspectiva lógica para a percepção do todo e dos seus elementos, tanto no aspecto individual, quanto no estrutural. Agora pode se entender então, o que é o “conteúdo geométrico” de uma figura. Trata-se do conjunto das propriedades geométricas que permanecem imutáveis através das transformações projetivas. Assim, do ponto de vista lógico, estão justificadas todas as geometrias que são deduzidas da projetiva.

Cassirer atenta novamente para a obra de Felix Klein. “Como F. Klein tem mostrado em detalhes, as mais diversas espécies de geometrias podem ser metodicamente fundamentadas e similarmente deduzidas procedendo de um dado grupo para um sistema mais amplo por meio de uma regra definida” (SF: 90). Na realidade, isso é feito através da teoria dos invariantes aplicada a um determinado grupo.

No século dezenove, com o aparecimento das geometrias não-euclidianas instalou-se uma “crise” sobre os fundamentos da matemática. Para os filósofos matemáticos a verdade ficaria comprometida, se fosse estabelecida a legitimidade das geometrias não-euclidianas. A admissão dessas “geometrias”, para eles, implicaria negar o conceito de verdade, pois, para a maioria de pensadores da época, principalmente Kant, a posição geral era que a geometria de Euclides lhes



fornecia a única forma possível para uma correta abordagem da realidade (EPC: 41 Vol. IV).

O primeiro problema levantado em face das geometrias não-euclidianas foi a questão da consistência. Pensava-se que, de uma hora para outra, poderiam ser provadas duas proposições contraditórias como verdadeiras, e isto era uma indicação clara da inconsistência do sistema. Essa hipótese despertou os matemáticos e lógicos para um fato de suma importância, nunca levado em consideração antes.

As geometrias não-euclidianas partiam dos quatro primeiros postulados da euclidiana e de uma negação do quinto. Ora, se ficasse evidente uma inconsistência em uma delas, esse fato invalidaria a própria geometria euclidiana. (Barker, 1976, p. 72).

No início, não se percebeu que a geometria euclidiana participa da mesma sorte das não-euclidianas, mas isso é verdade. Cassirer apóia-se em Felix Klein para mostrar esse destino comum das geometrias :

“Em seu estudo sobre a chamada geometria não-euclidiana (1871), demonstrou Felix Klein em termos absolutamente gerais, que todo o sistema dessa geometria pode projetar-se perfeitamente sobre a euclidiana. (Klein, *Mathematische Abhandlungem*, t. i, pp. 244 ss). Esta ‘projeção’ faz com que se torne ilusória qualquer vantagem de valor que pudesse reconhecer uma forma sobre a outra. Demonstra que todas compartilham da mesma sorte no que sua ‘verdade’ se refere, e que qualquer contradição que possa encontrar em um dos sistemas aparece inevitavelmente outra igual nos demais. Hilbert pôde completar e confirmar esta prova ao demonstrar em seus *Fundamentos da geometria*, que, as proposições das distintas geometrias não só podem traduzir umas nas outras, como também podem ser vertidas nas proposições da análise pura da teoria dos números reais, por onde todas e cada uma das contradições que naquelas podem ocorrer tem que se manifestar necessariamente nestas” (EPC: 43 Vol. IV).

Os postulados e axiomas euclidianos que foram considerados por vários séculos como protótipos de “verdades eternas” passam agora, a serem vistos como “verdades relativas”.

Na filosofia antiga, especialmente em Platão, o conceito filosófico de verdade estava ligado ao conceito da verdade geométrica. A obra de Euclides foi considerada como a realização das aspirações platônicas. O processo de “intuir” as idéias platônicas (*eidos*) passa necessariamente pela geometria (EPC: 38 e 39 Vol. IV). Esse processo de intuição não foi substancialmente alterado na filosofia moderna. Como Descartes, Leibniz também se interessava por matemática e filosofia, mas não concordava com o critério cartesiano de verdade. O motivo principal da discordância era o apelo cartesiano à intuição. Vários exemplos matemáticos levavam Leibniz a suspeitar da intuição como fonte de evidência da verdade. As curvas que têm assíntotas são um deles. Na representação gráfica de uma função, a curva por ela descrita aproxima-se indefinidamente de uma reta, porém, sem alcançá-la. No caso, diz-se que a curva aproxima-se assintoticamente da reta. Seguindo essa intuição espacial, acredita-se que as curvas se encontram, mas, em verdade, matematicamente, elas não se encontram. Isto se deve ao fato de que, entre a equação da reta assíntota e a da curva, não há nenhum ponto em comum. O sistema formado pelas equações de ambas não tem solução.

A crise da intuição, como ficou conhecida, não resultou do abandono radical dessa fonte de conhecimento, mas, alerta do seu uso de uma maneira simplista. Tudo aquilo que a intuição sugere deve ser submetido ao crivo da lógica. Ela é um dos expedientes que pode conjecturar a verdade sobre algo, mas a prova

dessa verdade não pode dispensar a instrumentalidade da lógica (EPC: 41 e 42 Vol. IV).

Para alguns pensadores da época reconhecer geometrias não -euclidianas seria em última instância renunciar a razão, pois se a geometria de Euclides era um produto da razão pura, não poderia agora, essa mesma razão, produzir várias geometrias com idêntica validade. Assim, o aparecimento dessas geometrias afetou a filosofia (EPC: 41 Vol. IV).

A matemática é, para a maioria dos matemáticos modernos, uma teoria de relações. Cassirer endossa plenamente essa posição. Ela trata apenas das relações existentes entre as formas e não as formas tomadas nelas mesmas, e nunca se pronuncia sobre a existência ou não dos entes que são objetos de seu estudo. A forma “se (...) então”, com a qual se expressa um teorema, evidencia isso. As diversas geometrias só falam das relações entre seus objetos e não desses objetos em si mesmos.

Em sua geometria analítica, Descartes, como matemático, liga o espaço aos números (pares ordenados). Aqui, deixa transparecer que o espaço é uma forma de ordenação. Já em sua meta física, o espaço é algo absoluto, pois tem um estatuto de “substância extensa”. A postura dos filósofos que combatiam as geometrias não-euclidianas nascia de um equívoco. Em vez de tratar a questão do espaço como um problema lógico-epistemológico, o tratavam como um problema ontológico. Em síntese, eles raciocinavam da seguinte forma: se existem vários sistemas geométricos axiomáticos, existem então, vários “espaços” e, conseqüentemente, vários “universos”. Ora, tudo isto lhes parecia um ataque ao

coração da filosofia que sempre se apresentou no passado como portadora de um conhecimento, único, rigoroso e universal da realidade.

A principal crítica feita pelos oponentes era de que a existência de vários espaços transgride o postulado fundamental que está implícito *a priori*, no próprio conceito de espaço. Segundo esse postulado, o espaço deve ser único e os espaços não-euclidianos estariam desmentindo tudo isso. Cassirer reconhece a validade da crítica, mas faz um reparo fundamental:

“Não cabe dúvida de que essa objeção é fundamentada, e, ainda mais, é irrefutável se nos mantemos em uma posição **substancialista do espaço**. O espaço aparece então como algo que existe por si só e a geometria deve reconhecer isto, no sentido de nos fornecer uma imagem fiel e completa dele. Pois bem, se as distintas geometrias nos fornecem distintas imagens do espaço, se uma delas mantém, por exemplo, que a curvatura do espaço é igual a zero, e a outra, que ela é uma quantidade positiva ou negativa, então não cabe dúvida de que desaparecerão, irremediavelmente, a unidade e precisão original; e se tentamos determinar este espaço, nos veremos envolvidos em antinomias. Não é difícil compreender, não obstante, que essas antinomias não gravitam sobre o conceito geométrico, senão que nascem de uma falsa colocação do problema, que de fora se impõe a esse conceito. A geometria é uma ‘pura teoria de relações’: não versa sobre o conhecimento de coisas e características de coisas, de substâncias e propriedades de substâncias, mas, simplesmente sobre ordenações” (EPC: 56, Vol. IV).

Descartada a posição substancialista do espaço, sua unidade só é afetada formalmente, e nisto não há nenhum problema, conclui Cassirer, chamando atenção para o abandono da posição substancialista de espaço nos sistemas filosóficos do século dezessete e dezoito. O próprio Leibniz, antes de Kant, já havia declarado que o espaço é uma “forma” pura. O espaço, para Leibniz é a “forma de ordenação do coexistente” e o tempo “a forma de ordenação do sucessivo” (EPC: 57 Vol. IV).

Muito se ganhou na matemática, quando a exposição dos seus conteúdos foi tratada através da estrutura de **grupo** (Eves, 2004, p. 536). Sabe-se que um conjunto tem a estrutura de grupo, se existe uma lei de composição interna definida, possuindo as propriedades associativas e a existência de elemento neutro e inverso. Com a adoção do conceito de grupo, em realidade, passa-se do conceito de número para o de operação que é muito mais abrangente. Com essa passagem, desliga-se completamente da intuição. Cassirer afirma:

“O conceito de grupo é, manifestadamente, característico das matemáticas puramente intelectuais, desligadas de toda a intuição, uma pura teoria das formas, na qual não se combinam quantidades nem imagens delas, que são números, mas apenas objetos intelectuais, coisas da mente, as quais podem corresponder objetos reais ou relações entre eles, porém não necessariamente” (EPC: 50 Vol. IV. Cassirer *apud* Klein).

O conceito de grupo tem relação com a teoria dos invariantes<sup>21</sup> que se aplica também à geometria. Com a aplicação dos conceitos derivados de essa teoria, torna-se possível estabelecer as diferenças específicas de cada geometria. “Toda geometria é, por seu conceito e função geral, uma *teoria de invariantes* com respeito a um determinado grupo e, a eleição destes grupos depende da estrutura especial que aquela adote” (EPC: 51 Vol. IV). Daí, como já se referiu o que se classifica realmente de geométrico não é qualquer conteúdo de geometria. Geométricas serão consideradas apenas as propriedades que se mantiverem invariáveis, diante de determinadas transformações.

---

<sup>21</sup> Em álgebra, trata da função dos coeficientes que não é afetada pelas operações que são realizadas com as variáveis da função (Eves, 2004, p. 560).

### 2.3.2 A posição de Cassirer sobre o espaço geométrico

O desenvolvimento da geometria, desde a idade clássica até a moderna, lança luz sobre um importante problema filosófico. Trata-se da relação entre a permanência e a mudança. Aquilo que não muda está intimamente ligado ao conceito de substância, que teve um longo percurso na história da filosofia, e a mudança está ligada ao conceito de função que, por seu turno, também teve um longo percurso na história da matemática.

Em sua origem histórica, o conceito matemático de função, curiosamente parte do conceito de lugar geométrico<sup>22</sup>. Cassirer enfatiza como os gregos buscavam sempre resolver o problema da permanência e da mudança.

“Se a geometria fosse definida, na linguagem platônica, como aquilo que possui o ‘ser eterno’ e, se fosse verdadeiro que a prova exata fosse somente possível do que sempre é mantido em si mesmo e na mesma forma, então a mudança só poderia ser tolerada com um conceito auxiliar e nunca poderia ser usada como um princípio lógico independente” (SF: 90).

A consideração de figuras geométricas que não sofrem variações, o que, em princípio preservaria o seu “ser eterno”, tornou-se um veículo para ocultar o “ser” real da figura, pois, escondia a relação dinâmica que existe entre figuras diferentes. A análise através da teoria dos grupos aplicada à geometria mostra isto. Cassirer prossegue:

“A explicação platônica é agora confirmada em um novo sentido. Geometria, como a **teoria dos invariantes**, trata de certas relações imutáveis, mas esta imutabilidade não pode ser definida a menos que entendamos com o seu pano de fundo ideal, certa mudança fundamental em

---

<sup>22</sup> Um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos de uma figura que gozam de uma mesma propriedade.

oposição a qual ela ganha a sua validade. As propriedades geométricas imutáveis não são como tais em si mesmas, mas, somente em relação a um sistema que nós implicitamente assumimos” (SF: 90 e 91).

Do exposto segue que, permanência e mudança só adquirem significado com relação uma à outra. A permanência não significa uma propriedade absoluta dos objetos, mas, somente uma operação mental com relação a um sistema referencial previamente escolhido.

Dentro da teoria dos grupos, que exerce o papel codificador das geometrias, a mudança tem um limite pré-determinado, ela não atua fora da estrutura que caracteriza o grupo (Eves, 2004, p. 606).

Assim, toda mudança tem um âmbito de ação. Já a permanência, não é ligada a duração das coisas e de suas propriedades, mas trata-se de uma independência relativa dentro do grupo cujos elementos estão em uma dependência funcional (SF: 90).

Na história da geometria ficou caracterizada, de maneira bem clara, a evolução do conceito de espaço. Cassirer concorda com Leibniz que admite a eliminação dos aspectos métricos na geometria. Para ambos, o espaço é pura “ordem de coexistências possíveis”. A estrutura dessa ordem aparece pela construção harmônica com a qual são gerados os pontos do espaço projetivo.

Os entes geométricos primitivos, ponto, reta e plano só apresentam uma existência relacional. Eles são estabelecidos pelos postulados que expressam as propriedades que se decide atribuir-lhes. Para Leibniz, a matemática não é a ciência da quantidade e sim da qualidade, assim, para ele, a arte combinatória torna-se fundamental (EPC: 75 Vol. IV). Não se trata do número de combinações

possíveis de formação com elementos dados; e sim das conexões possíveis entre as formas. Essa estrutura relacional não é a propriedade dos elementos em si mesmos. Figuras diferentes, tais como, pontos e retas por um lado, e círculos e esferas por outro, apresentam ligações comuns não percebidas intuitivamente, mas que serão vistas após as transformações adequadas. Cassirer afirma:

“Essa conexão dedutiva constitui uma forma e distinta determinação que pode ser separada do seu fundamento material e estabelecida por si mesma em seu sistemático caráter. Os elementos particulares nessa construção matemática não são vistos de acordo com o que eles são em si mesmos, mas, simplesmente como uma certa forma universal de ordem e conexão; matemáticos, por fim, reconhecem neles não outro ‘ser’ do que aquele que lhes pertence pela participação nesta forma. Pois, é somente esse ser que entra na prova, no processo de inferência e, é assim acessível para a plena certeza que matemáticos dão a seus objetos” (SF: 93).

Essa posição de Cassirer é confirmada por David Hilbert (1862-1943): a geometria é uma “doutrina de relação”. Aquilo que a intuição bruta oferece é apenas um hipotético ponto de partida que serve para a fixação do aspecto lógico da relação e o descarte do aspecto psicológico. A lei que conecta os elementos é o que estabelece o que há de real na geometria. Por isso os elementos geométricos não podem ser considerados isoladamente. Cassirer afirma:

“A intuição parece captar o conteúdo como uma existência isolada e contida em si mesma, mas tão logo prosseguimos para caracterizar a existência em um juízo, o mesmo se envolve em um rede de estruturas relacionadas que mantêm umas as outras. Conceito e juízo conhecem o individual somente como um membro, como um ponto na sistemática multiplicidade; aqui, como na aritmética, a multiplicidade, como oposta a toda estrutura particular, aparece como a real lógica *prioritária*” (SF: 94).



A mesma característica relacional constatada na relação dos números dentro de uma sequência-ômega é agora, verificada na relação invariante entre elementos geométricos.

O desenvolvimento da matemática na modernidade mostra que, ela não está restrita ao estudo de nenhuma classe de objetos particulares. Descartes, com sua “*mathesis universalis*”, deixou claro que todos os problemas da matemática dizem respeito à ordem e à medida. Leibniz, prosseguindo com a idéia, salienta que, o papel importante na matemática é a ligação lógica entre as combinações dos tipos possíveis.

Cassirer cita Russell afirmando, em *Principles of mathematics*, que quantidade não ocorre na matemática pura. E o que ocupa o lugar da quantidade é a “ordem” (Russell, 1996, p. 419).

A geometria métrica e a projetiva também caminham nessa direção, mas, o que mais enfaticamente aponta para essa direção é a teoria dos grupos. Nessa teoria, os sistemas de operações, em suas dependências mútuas são examinados. Com esse expediente, nota-se grande avanço e economia devido a teoria ser uma espécie de forma de “classificação genérica”. Previamente são definidas todas as propriedades estruturais do grupo, depois quaisquer elementos matemáticos, por mais diferentes que sejam, mas que tenham as mesmas propriedades, pertencerão ao grupo.

A seguir, Cassirer alerta para a tarefa da matemática diferentemente daquilo que, com relação a essa ciência, é, popular e escolarmente concebido.

“Em seu significado geral, a tarefa da matemática não consiste em comparar dividir ou computar grandezas dadas, mas antes, em isolar as próprias relações geradoras, sobre as quais todas as possíveis determinações de grandezas descansam, e em determinar a mútua conexão dessas relações. Os elementos e todos os seus derivados aparecem como um resultado de certas regras originais da conexão que, devem ser examinadas na sua específica estrutura, bem como no caráter que resulta de sua composição e interpretação” (SF: p. 95).

Com o advento das geometrias não-euclidianas o estudo da geometria passou por um processo que a libertou de suas “amarras”, ou seja, as propriedades das figuras são agora estudadas através dos invariantes.

Na contra-mão de tudo que vem sido exposto até aqui aparece a fundamentação da geometria em objetos empíricos, mas essa posição é semelhante à que Mill tentou fazer para o conceito de número. É interessante notar que, essa fundamentação empírica da geometria já se desqualifica quando se inquire pela fundamentação das geometrias com mais de três dimensões. A fundamentação dessas geometrias se apresenta eliminada *a priori*, e essa eliminação não vem de uma questão factual, mas apenas de uma questão metodológica. Os postulados e axiomas da geometria euclidiana não são estabelecidos com “cópias” vindas da observação externa. O material “bruto” vindo por meio da impressão dos sentidos é útil como ponto de partida, mas, na formação dos conceitos, não é ele que confere a objetividade e nem impõe limites para o desenvolvimento da geometria. Os conteúdos sensoriais são apenas pontos de partida.

“Eles [os conteúdos sensoriais] servem como o primeiro incentivo, mas como tal, não entram no sistema da prova dedutiva que deve ser formada em estrita independência. Mas, no estabelecimento dessa, o tema já é decidido do ponto de vista da crítica do conhecimento; pois, tal crítica

não questiona a origem dos conceitos, mas somente o que eles significam e se valem a pena como elemento de prova científica” (SF: 103).

Hoje, os matemáticos têm a liberdade para criar seus conceitos, mas essa liberdade não é irrestrita, pois ela é limitada pela consistência do conteúdo do sistema.

O espaço euclidiano tornou-se mais claramente definido a partir do momento em que começou a ser comparado com outras formas criadas de espaço. Quando se considera a metageometria, a geometria de Euclides aparece com uma posição inicial passível de desenvolvimento. Por outro lado, do ponto de vista da crítica do conhecimento, ela representa o fim de uma série de representações intelectuais.

A investigação da origem da idéia de espaço mostra que não pode ser confundido o espaço da percepção sensorial, com o espaço da geometria. O espaço sensorial apresenta direções opostas, tais como: “abaixo”, “acima”, “direita”, “esquerda”, etc. Já o espaço geométrico é “neutro”, seus pontos nada indicam acerca de direções, pois o princípio da homogeneidade do espaço nega essas diferentes direções. Cassirer enfatiza a diferença entre os dois espaços.

“A aparência que a continuidade do espaço é uma propriedade sensorial fenomenal tem sido definitivamente colocada de lado por uma mais profunda análise matemática do contínuo, que tem sido efetuada através da moderna teoria da multiplicidade. O conceito de contínuo usado pelos matemáticos não é de maneira alguma obtido da indefinida imagem de espaço que nos é oferecida pela intuição sensível” (SF: 105).

Ao longo da história da matemática, a geometria euclidiana foi considerada por muitos como a descrição do espaço empírico. Esse fato é conhecido como o mito de Euclides (Davis, 1986, p. 364), mas isso há muito já não é sustentado. A geometria euclidiana é, em realidade, um sistema racional dedutivo composto de condições (axiomas, postulados e definições), deduções (teoremas) e inferências (corolários). No que tange ao conceito de espaço, nem mesmo a doutrina kantiana ficou livre de objeções. Kant é acusado de manter um resíduo do sensorial em sua “intuição” pura do espaço. Segundo Cassirer, essa objeção procede, uma vez que, só os aspectos lógicos dos conceitos fundamentais são confirmados pela extensão moderna do campo da matemática.

“A regra pela qual nós podemos ainda atribuir a experiência, não jaz na fundamentação dos sistemas particulares, mas na seleção que nós temos que fazer entre eles. É argumentado que, como todos os sistemas são igualmente válidos em estrutura lógica, necessitamos de um princípio que nos guia em sua aplicação. Esse princípio só pode ser procurado na realidade, visto que, não estamos aqui interessados em meras possibilidades, mas, com o conceito e o problema do próprio real; em resumo, ele pode ser somente procurado na observação e experiência científica. Experiência assim nunca serve como uma prova ou mesmo um suporte do sistema matemático de condições, pois, tais sistemas precisam descansar sobre eles mesmos; mas aponta o caminho da verdade dos conceitos para sua realidade” (SF: 106 e 107).

Com essas ponderações Cassirer parte para a abordagem do espaço real.

### **2.3.3 A posição de Cassirer sobre o espaço real**

Agora, o problema ultrapassa as fronteiras da matemática pura e se localiza na física que lida com o espaço real dos objetos concretos.

A questão deverá ser resolvida pela análise dos métodos de procedimentos da física. A experiência, tomada no sentido de *experimentum crusis* de Bacon<sup>23</sup>, não pode ser usada para decidir se o sistema matemático de hipóteses deve ser mantido ou rejeitado. Não existe experiência “pura”, uma análise mais atenta da chamada experiência pura mostra-la-á híbrida. “A teoria abstrata nunca permanece de um lado, enquanto do outro, permanece o material da observação como ele é em si mesmo e sem qualquer interpretação conceitual” (SF: 107).

Quando se efetua uma medição, em um processo experimental, deve-se ter sempre em mente, que está ligado a esse processo um conjunto de pressuposições que abrigam concepções de espaço e relações entre os corpos envolvidos que poderão ou não confirmar essas pressuposições. Quando há contradição entre o valor exigido pela teoria e o valor obtido pela experiência, restam dois caminhos. Ou muda-se o modelo matemático, ou o modelo teórico da física. Cassirer pensa que, não se deve mudar de geometria quando surgem problemas com medidas usadas; sem antes revisar as pressuposições da teoria física.

A escolha de uma geometria e conseqüentemente, o seu espaço para a abordagem dos fenômenos físicos, não fica, contudo, entregue ao capricho do físico. Há critérios na escolha. A consistência geral de um sistema é apenas um deles.

---

<sup>23</sup> Francis Bacon (1561-1626), em *Novum. Organum*, II, 36, usou essa expressão referindo aos experimentos que possibilitam a escolha da hipótese verdadeira entre todas que são possíveis na explicação do fenômeno.

O espaço euclidiano é evidentemente o mais simples, ele apresenta uma curvatura constante igual a zero. Já o espaço riemaniano apresenta uma curvatura positiva e não constante. Entretanto, ele pode ser estabelecido a partir do espaço euclidiano através de um processo construtivo sintético, mediante acréscimos de novas condições. Vale lembrar que, tanto a geometria euclidiana, como as não-euclidianas são casos particulares da geometria projetiva. Assim como os números naturais geram outras séries, analogamente, o espaço euclidiano pode gerar outros espaços.

Dentro de um sistema matemático lógico formal, podem-se escolher postulados que permitem estabelecer o caráter do que é inteligível no mundo real. Esse sistema pode ser simples, como o euclidiano, mas não exclui outros sistemas que têm por objetivo interpretar situações mais complexas que possam surgir. Mesmo neste caso, quando não pode ser feita a redução de uma geometria à outra, não se exclui a aplicação dessa geometria em termos concretos. O fato é que, todos esses conteúdos geométricos trabalhados nas diversas geometrias expressam sistemas de relações, nos quais, não é estabelecida qualquer “essência” para elementos individuais. Assim, é completamente irrelevante se o elemento possa ser isolado e intuitivamente representado. Cassirer afirma:

“O sistema da geometria universal mostra que, essa esfera de problemas não afeta o caráter lógico do conhecimento matemático como tal. Mostra que o conceito puro por si mesmo está preparado e apto para toda mudança concebível no caráter empírico das percepções; **A universal forma de série é o meio pelo qual toda ordem do empírico é para ser entendida e logicamente controlada**” (SF: 111).

Essas palavras de Cassirer enfatizam o controle da ordem empírica pela matemática. Assim, deve se dar um passo adiante a fim de analisar a importância dada por ele ao caráter relacional e funcional dos conceitos empíricos que são matematicamente articulados para a composição das teorias das ciências naturais.

### **3 Função nos conceitos de ciência natural**

#### **3. 1 Introdução**

Para melhor compreensão da nova teoria da formação de conceitos proposta por Cassirer se faz necessária a introdução de alguns aspectos psicológicos da mesma. Cumpre explicar como os elementos da pura lógica se fazem presentes na consciência, uma vez que, não há uma equivalência entre eles e os conteúdos da percepção. Uma mera experiência sensível não dá conta da unidade do objeto e essa unidade é o núcleo do seu conceito. Por mais repetidas que sejam as percepções, elas não fornecem a unidade requerida por um conceito. E, além disso, a atenção, por mais refinada que seja, perde toda sua função no estabelecimento do conceito diante de uma fenomenologia mais exigente (SF: 24).

Na nova teoria do conceito proposta por Cassirer, o papel desempenhado pela atenção é diferente daquele com o qual ela atua na teoria tradicional . Nessa última, a atenção se direciona para o objeto com espécie, na nova teoria, ela focaliza o objeto considerando-o dentro da estrutura que ele está inserido. É essa mudança de função que reveste o conteúdo da percepção de sentido lógico. Há uma grande diferença quando a consciência percebe um elemento de um objeto complexo e o considera separado, e da percepção do mesmo elemento como parte da estrutura do todo. Cassirer cita dois exemplos: Uma coisa é a atenção focalizar a cor vermelha como parte de um objeto, outra coisa, é considerar “o” vermelho como espécie. Outro exemplo vem da aritmética, uma coisa é considerar



o número quatro como parte de uma série numérica, outra coisa é considerá-lo isoladamente na intuição de qualquer conjunto de quatro elementos.

No primeiro caso há uma relação na qual conceito é sempre determinado por “atos” lógicos, mas o que ocorre no segundo caso é um simples aqui e agora (SF: 24 e 25). O significado, no conceito, deriva da estrutura sensorial do conteúdo, mas ele é produzido por ações intencionais da mente, segundo uma forma lógica. Essas ações executadas pela mente são distintas da unidade sensorial dos conteúdos, mas imprimem sobre eles um sentido lógico. Nesse processo abstrativo pode-se manter a utilização da palavra abstração, mas, evidentemente, em outro sentido. Cassirer afirma:

“Por abstração, não é mais entendida uma uniforme e indiferenciada atenção (*attention*) para um dado conteúdo, mas, uma inteligente realização dos mais diversificados e mutuamente independentes atos de pensamento; cada um dos quais, envolve uma espécie particular de *significado* do conteúdo, uma direção especial da referência objetiva” (SF: 25).

As doutrinas empiristas do conceito, cuja base é a semelhança entre os elementos em vários objetos, na visão de Cassirer, são falhas. Seu fracasso resulta do fato de não se conseguir uma semelhança perfeita do elemento escolhido nos objetos focalizados mesmo com uma fenomenologia mais exigente. Na nova teoria de conceito, os elementos estão ligados não por semelhança, mas, por uma lei que os une em vista do todo. Essa lei é geralmente expressa por uma função serial na qual os elementos comuns a vários objetos são ordenados, diferentemente das teorias empiristas em que os elementos simplesmente aparecem, um ao lado do outro. Cassirer afirma:

“A forma de uma série  $F(a, b, c...)$  que conecta os membros de uma multiplicidade, obviamente, não pode ser pensada de maneira que se refira a um individual  $a, b$ , ou  $c$ , sem perder deste modo, seu peculiar caráter” (SF: 26).

Nessa perspectiva pode-se dizer que a nova teoria de conceito rompe com os pressupostos da ontologia aristotélica, ao deslocar a ênfase do conceito de **coisa** para o conceito de **relação**. A forma (*eidos*) das coisas será atingida, tanto quanto possível, por meio das funções. O novo processo abstrativo substituirá as características particulares dos objetos por elementos equivalentes, impedindo o conceito universal de apresentar-se vazio. Para cada característica desprezada, há uma função que abrange toda a extensão da variação peculiar a essa característica. A lei que conecta os conteúdos dessa função é **o universal**, e seus valores individuais, **o particular** (SF: 224). A representação funcional é uma forma de série, e dentro dela, há dois planos que não podem ser confundidos. O princípio da série é um, os seus membros, o outro. Além disso, segundo Cassirer, a totalidade e a ordem de puras “formas seriais” expressam o núcleo dos sistemas das ciências, especialmente das exatas, sem apelar para pressupostos psicológicos ou metafísicos (SF: 26).

O resultado acima exposto deve sempre estar presente no processo de análise, que será explicitado em alguns tópicos importantes da física e da química. No presente percurso selecionam-se os exemplos históricos mais comprobatórios da teoria de Cassirer para formação de conceitos na física e na química.

## 3.2 Construção de conceitos na Física

### 3.2.1 O ideal da Física

Em oposição a formação aristotélica de conceito, a representação dos objetos da natureza como seres ideais encontra na matemática um campo perfeitamente propício para o pensamento ir muito além do “dado” empírico. À primeira vista, a matemática parece não fornecer um instrumento para expressar os conteúdos das ciências naturais, pois ela, na sua estrutura geradora, está confinada dentro do seu próprio campo de ação. Manter ambos campos separados e afirmar que o conceito construtivo da matemática não procura, e, conseqüentemente; não atinge os conceitos das ciências naturais, não faz jus à questão. A adoção de uma posição unilateral não é a solução. Somente com a consideração dos dois lados pode-se atingir a função plena dos conceitos, pois, “a questão, quanto ao significado e função do conceito ganha sua final e definitiva formulação somente no conceito de natureza” (SF: 113).

Os conceitos dos elementos da natureza parecem confirmar o processo de formação de conceitos da lógica tradicional. Eles apresentam-se com cópias na percepção. Assim, o pensamento teria um papel meramente passivo e não exerceria nenhuma liberdade ativa na arquitetura do conceito. Cassirer constata essa posição.

“O conceito é somente a cópia do dado, ele somente significa certas características que estão presentes e que podem ser indicadas na percepção como tal. (Conf. p. 5). A concepção do significado e tarefa da ciência natural também corresponde completamente a essa visão. O inteiro significado e certeza do conceito como encontrado na ciência natural, depende conseqüentemente da condição de que ele não contenha nenhum elemento que não possua seu preciso correlato no mundo da realidade” (SF: 113).

Um conhecimento completo não deve ficar atrelado a essa concepção na ciência natural. Pode-se constatar que a atual filosofia da física endossa essa visão das ciências naturais, apenas apresentando -a, com maior rigor. Para Cassirer, isso reflete plenamente a posição metafísica de buscar a essência das coisas; como se Kant nunca tivesse existido. Cassirer enfatiza que a tarefa da filosofia moderna é bem mais modesta, pois, visa apenas uma descrição real e completa dos fenômenos. Essa postura foi adotada para fugir de postulações de caráter metafísico na ciência natural (SF: 114).

Quando a ciência lança mão de conceitos tais como: átomos, moléculas, energia, etc. ela está apenas usando uma maneira cômoda de agrupar os dados dos sentidos. Esses conceitos funcionam como redutores de elementos heterogêneos a uma unidade. O alvo dessa filosofia da física é a substituição dos conceitos que entram em suas teorias pelas percepções sensoriais, como se elas fossem “a plenitude concreta de fatos empíricos” (SF: 114). Assim, o verdadeiro ideal da física pautaria pela exclusão de todos os elementos que não possuem uma correlação direta com os sentidos em suas teorias (SF: 114). Diante disso, Cassirer significativamente pergunta, se seria esse o ideal da física. Sua resposta é evidentemente negativa.

Uma importante questão a ser decidida é se com o atual procedimento da ciência, fundamenta-se ou não em uma teoria geral do conhecimento. As teorias historicamente apresentadas são uma coleção de observações alinhavadas ou apresentam elementos lógicos que são de ordem completamente diferente de

fatos observáveis? Prevalecendo esse último caso, faz-se necessário um novo tipo de fundamentação para os fenômenos.

A exatidão matemática de uma teoria da física só é atingida quando se pode numerar ou medir os “fatos” que são relacionados nela. Uma simples descrição do “dado” já exige numeração e medida. Quando considera do o princípio da construção conceitual da matemática, um problema fundamental é defrontado. Trata-se da aplicação da matemática à ciência em geral (Silva, 2007, p. 26). Como a construção matemática, que dá exatidão aos dados, pode resolver tal problema, sendo conquistada de forma independente desses dados? Se a matemática é um conhecimento exclusivamente *a priori*, como pode fornecer garantia da exatidão das ciências naturais? Ao traduzir os “dados” dos sentidos, não estaria ela descaracterizando-os a favor de uma pura ficção mental? Esse tipo de pergunta demanda uma resposta precisa. Realmente há possibilidade de falsificação e essa hipótese não pode ser descartada; já que, qualquer fato espaço-temporal, para ser objetivamente tratado, exige aplicação de número e medida.

Partindo da visão ingênua do número como parte das propriedades físicas dos corpos, tais como: cor, brilho, dureza, etc., pode-se concluir que, à medida que a construção matemática se torna mais complexa, a via natural de acesso às coisas sensoriais torna-se inócua. Cassirer volta exemplificar com as cônicas. Elas foram aplicadas ao movimento dos corpos celestes, mas suas propriedades não são inerentes ao movimento desses corpos como, ingenuamente, se poderia concluir pelas leis de Kepler.

Na primeira lei, tem-se um exemplo da forma (geometria). Na terceira, um exemplo da grandeza (aritmética). De início, não há nenhum problema epistemológico aqui, mas quando o caso é aprofundado o problema aparece. Foi o fenômeno que determinou a propriedade da cônica ou foi a propriedade dela que determinou como o fenômeno é conhecido? Qual é a verdadeira direção exata do conhecimento? Esse exemplo, entre outros, leva Cassirer a defender uma teoria científica, não importando a área de sua atuação, como sendo uma tessitura entre o “real” e o “não real”. Assim, ele conclui:

“Tão logo damos um passo além da primeira observação ingênua de fatos isolados, tão logo nos perguntamos pela *conexão* e a *lei* do real, nós transcendemos os estritos limites prescritos pelas exigências positivistas” (SF: 117).

Qualquer teoria mecânica, a exemplo da newtoniana, tem que utilizar um conceito de movimento. No estabelecimento desse conceito, não se pode ater somente aos “dados” da percepção, sob pena de jamais se ter uma teoria científica. Movimento é a razão entre o espaço e o tempo no sentido matemático dos termos, logo, desvinculado dos espaços e tempos empíricos. O movimento, do ponto de vista científico, vai além da experiência sensível. Os seus elementos constitutivos tais como: ponto material, velocidade uniforme ou variada e aceleração são todos ideais e não vieram da experiência. O físico considera tudo isso como vindo dos dados sensíveis, mas, para o epistemólogo, a coisa não se passa assim. Veja o que diz Cassirer:

“Todos esses conceitos podem justificadamente servir ao físico matemático como dados imediatos e fixos; mas eles não são assim para o epistemólogo. Para esse último, existe uma ‘natureza’ na qual, movimentos são fundados como objetos descritíveis, somente como um resultado de uma inteira transformação intelectual do dado” (SF: 119).

A transformação operada pela matemática e assumida pelo físico constitui um problema original e real para o epistemólogo. Há uma necessidade de explicar o estatuto dessa transformação, uma vez que, existe uma substituição do sensível pelo ideal, para, em seguida, o resultado voltar a ser aplicado ao sensível com sucesso. Essa abordagem implica em movimentos que só são inteligíveis dentro dos parâmetros idealizadores.

Do ponto de vista estritamente sensorial, o movimento é paradoxal. Para uma teoria exata do movimento dos corpos empíricos, eles devem ser substituídos por corpos “rígidos” e ideais; ou seja, geométricos. Cassirer concorda com Karl Pearson (1857-1936) em sua obra, *“The grammar of science”* onde esse autor concluiu que “o movimento não é um fato de sensação, mas de pensamento; não é ‘percepção’ mas ‘concepção’ ” (SF: 121). O movimento é resultado não de uma realidade passiva, mas de uma atividade espontânea do pensamento que concebe formas geométricas se deslocando em um espaço e tempo absoluto.

Por isso Cassirer chama a atenção para as contradições em que a mecânica se envolveu ao tentar aplicar suas leis aos movimentos empíricos. Um exemplo marcante é o caso da existência do éter que foi concebido como um meio para explicar a propagação da luz. Albert Einstein (1879-1955) provou sua inexistência por experiências que estabeleciam contradições na propagação da luz, quando se considera o éter como um meio material de propagação da mesma (Einstein, 1983, p. 12). Cassirer afirma:

“Essas contradições desaparecem, logo que aprendemos a não confundir dados imediatos com elementos conceituais, (...)”.

E em seguida conclui:

“Tão logo nós lemos este completo mundo do pensamento diretamente do mundo dos sentidos, tão logo nós transformamos suas suposições lógicas nas partes da realidade, que assim seriam apreendidas pela sensação, nós cairíamos, uma vez mais, em todas as antinomias que são inerentes este tipo de dogmatismo, quer físico, quer metafísico” (SF: 121).

Diante do exposto, por um lado, como conceber a ciência como uma descrição de conteúdos da percepção de uma forma exclusiva? E por outro, se os dados dos sentidos têm que ser transformados, como a ciência adquire sua objetividade?

Para responder essa questão, deve ser considerado que o problema da formação dos conceitos nas ciências naturais é em linhas gerais uma substituição da multiplicidade dos sentidos por uma multiplicidade ideal considerada em seu limite (SF: 122). Essa multiplicidade ideal será vazada em estrutura de séries e limites matemáticos. Na matemática, os irracionais  $e$  e  $\pi$ , dentre outros, têm sua existência assegurada sem estarem ligados a qualquer fato empírico. A “existência” desses números é uma representação em qualquer sujeito que percebe e pensa, mas esse fato não garante sua existência objetiva. “A existência do número  $e$  significa nada menos do que, dentro de um sistema ideal de números, uma e somente uma posição, que é determinada sem dúvida e com necessidade objetiva pela série que usamos em sua definição” (SF: 124).

Diante de uma série, a primeira questão que se deve indagar é se ela converge ou não. No caso de convergência, existirá o limite finito que, por sua definição, deve ser único. A série convergente que estabelece o número  $e$  é:  $e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots$ . Essa série é a adição dos inversos dos fatoriais dos



números naturais. Semelhantemente ao processo de “corte” com o qual Dedekind estabeleceu o número irracional raiz quadrada de dois, aqui o número  $e$  divide o conjunto dos números racionais em dois subconjuntos distintos. Logo, esse número mantém uma precisa relação de “antes” e “depois” com os demais. Todos os números anteriores a ele são menores e todos os posteriores, maiores. Com esse processo é estabelecida a existência do número  $e$  como único e distinto de todos os demais. Dessa forma, Cassirer conclui:

“Aqui nós não apelamos de maneira alguma para a faculdade de separar representações e conteúdo de particulares semelhantes na consciência; nós estamos interessados de ambos os lados com conceitos puros que são suficientemente separados um do outro por condições lógicas que sua definição lhes impõe” (SF: 125).

Quando a posição “empirista” é assumida, a determinação do limite em seu significado geométrico exhibe a deficiência dessa posição. O limite, do ponto de vista algébrico, não apresenta nenhum problema, mas, se representado espacialmente em um eixo, o caso muda de figura.

Em uma série de pontos, quando se assinala o ponto avançando para o limite, à medida que se aproxima do mesmo, os pontos se sobrepõem uns aos outros e nenhum esforço da intuição consegue distingui-los (SF: 125). Isso porque os pontos não têm existência espacial em si, e sim uma existência relacional com os demais pontos. O mesmo princípio que rege a essência dos números, que é sua posição, vale também na formação dos pontos. De acordo com Cassirer:

“O ‘ser’ do ponto geométrico não é diferente em princípio do ‘ser’ do puro número e não pertence a

nenhuma outra esfera lógica. A construção da multiplicidade geométrica toma lugar, isto visto, de acordo com leis inteiramente análogas àquelas do desenvolvimento sistemático do sistema de números. Aqui, como ali, começamos com uma postulação de unidade e, assim, o progresso intelectual consiste na integração no sistema de todos os elementos ligados com o original por um a relação conceitual sem ambiguidade ou uma cadeia de tais relações” (SF: 126).

Assim, os pontos não têm nenhuma “realidade” espacial em si, eles são apenas válidos, na medida em que, expressam uma relação com os demais. Semelhantemente aos números é sua relação com os demais que os tornam reais (SF: 83 e 84).

Com respeito à “idealização” das representações, todos os dados do sentido precisam ser ligados em um sistema necessário de conceitos e leis. Esse agrupamento não é uma mera combinação, mas transformação das partes. Na formação desse mosaico concorre uma atividade independente e criativa, sem qual o mosaico, na realidade, seria um caos. Os próprios empiristas admitem essa forma de idealização, mas, não admitem que ela possa ser projetada de volta sobre os dados dos sentidos para substituí-los. Quando o empirista argumenta que não existe uma linha reta ideal e o que objetivamente existe são linhas mais ou menos retas, *ipso facto*, ele está pressupondo a reta ideal como termo de comparação. Por isso Cassirer se posiciona: “Para a existência do real, que pode ser afirmada e defendida criticamente, nada é mais significativo do que a objetiva necessidade lógica da idealização” (SF: 129). O uso da palavra limite refere-se a algo que não pode ser representado na intuição. Objeções nominalistas estão fora de propósito, e Cassirer retoma: “Esse nominalismo, no entanto, falha na

explicação do conceito de limite como já tinha falhado na explicação dos números puros” (SF: 129).

Cassirer finalmente argumenta afirmando que o conceito de limite não se vincula apenas a um nome, uma vez que, na definição do número e, por exemplo, estão somente relacionadas idéias com idéias e não idéias com palavras (SF: 129). Qualquer tentativa de considerar o conceito de ciência natural com simplesmente um agregado de fatos desconexos está fadada ao fracasso. “Nenhuma teoria científica está ligada a os fatos, mas está ligada aos limites ideais que os substituem intelectualmente” (SF: 130). O estudo dos gases relacionando pressão, temperatura e volume de um gás ideal confirma a posição aqui assumida. O problema agora em questão é se tal procedimento da ciência consiste **apenas** nessas substituições pelos limites ideais. Daí Cassirer ponderar:

“Todavia, em verdade, a relação entre os elementos teóricos e factuais, básicos da física, não podem ser descritos desta maneira simples. É uma relação bem mais complexa, ela é um entrelaçamento peculiar e mútua interpretação dos dois elementos; que prevalece na atual estrutura da ciência e reclama por uma mais clara expressão lógica da relação entre princípio e fato” (SF: 130).

A ciência, considerada como uma “descrição” pura e fiel dos fatos, é uma concepção moderna. De acordo com tal concepção, haveria uma completa e radical separação entre o que é “físico” e o que é “metafísico” (SF: 131). Nesse posicionamento, entretanto, há um mal-entendido, pois, a reflexão teórica e o trabalho científico produtivo nunca estiveram separados (Bunge, 2000, p. 28).

Para atingir um desempenho satisfatório no mundo dos fatos, os físicos muito lutaram para conseguir um método correto de abordagem dos fenômenos. No entanto, Cassirer defende que a oposição entre o “físico” e o “metafísico” faz parte do método, e nenhum dos dois aspectos pode ser eliminado.

Platão foi o primeiro a separar radicalmente o fenômeno, do reino do *logoi*, negando que este pudesse ser entendido nos fenômenos (SF: 132). Porém, para Cassirer, essa divisão não é radical, isto é, o domínio do fenômeno não exclui o domínio do *logoi* (SF: 133).

O ceticismo negou a possibilidade de conhecer alguma coisa além do fenômeno e que a tarefa da ciência seria simplesmente organizar os fenômenos entre si, através de sinais ou símbolos. As reais causas de suas origens permaneceriam desconhecidas. Para Cassirer, as consequências dessa posição são apenas práticas. Hoje, o empirismo científico se expressa da mesma maneira que o antigo. Cassirer afirma:

“Essas consequências permanecem essencialmente as mesmas, quer logicamente compreendendo como um evento surge do outro, ou meramente aceitamos o fato de certa coexistência ou sucessão empírica, e apoiamos nele” (SF: 133).

O empirismo propõe que haja uma disjunção entre um conhecimento empírico e o racional. Estariam as verdades de fato de um lado, e, as verdades de razão, do outro. David Hume (1711-1776) defendeu que só em matemática as verdades são necessárias, por serem apodíticas, mas, no mundo dos fatos, a aparente necessidade é mero **hábito** (Hume, 2000, p. 61). Em Platão, há uma correspondência entre os dois tipos de conhecimento.

Na alegoria da caverna (*Rep.* VI 509 d a VII 517 c), a sequência das “sombras” tem sempre uma contrapartida no mundo das idéias. Segundo Cassirer, quando uma “sombra” é isoladamente examinada, significados diferentes são obtidos; daí a variedade de opiniões. O verdadeiro conhecimento só surge quando há uma conexão teleológica na sequência das “sombras”. Nesse contexto, um elemento sempre exige o outro. A explicação cabal de um fenômeno não pode excluir o componente ideal a favor do sensorial, pois, nenhuma conexão sensorial dos fenômenos pode explicá-la satisfatoriamente. Cassirer faz uma analogia com a recusa de Sócrates em fugir da prisão. A não ocorrência da fuga não é explicada pela inércia de seus membros, mas por seu ideal ético (SF: 133).

Para Platão, a intermediação entre os dois tipos de conhecimento é feita pela matemática. “O caos dos sentidos da percepção precisa ser confinado em estritos limites, pela aplicação de puros conceitos de quantidade, antes que eles possam tornar os objetos do conhecimento” (SF: 134). O ser é um cosmo, ou seja, um todo estruturado dentro das leis matemáticas (*Philèbe* 16 24 f). Cassirer conclui: “A ordem matemática é condição imediata e a base da existência da realidade; ela é a determinação numérica do universo que gar ante sua interior preservação” (SF: 134).

Aristóteles separou as duas linhas de pensamento que foram vistas juntas em Platão. Na física aristotélica, o motivo matemático é afastado para um pano de fundo e o teleológico é dominante. Para o Estagirita, a relação empírica entre os corpos depende apenas de suas essências, que “esforçam” para atingir suas finalidades. Os corpos estão sempre arranjados em graus de afinidades. Assim, para eles, há um “lugar natural” prescrito por suas propriedades. Os aspectos

quantitativos expressos pela matemática atingem apenas “os acidentes” e nunca a essência das coisas. Fica destruída assim, por Aristóteles, a unidade que reinava entre o método matemático e o teleológico (SF: 134 e 135).

Coube ao astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) reverter essa situação. A matemática não podia ficar limitada apenas à uma função calculadora, pois, ela oferece, através de suas estruturas, modelos adequados para uma leitura eficaz dos dados sensoriais. A hipótese matemática cria uma conexão ideal entre os fatos, e serve para testar a validade dos dados vindos através dos sentidos. As hipóteses matemáticas adequadas oferecem as seguintes vantagens: expansão da teoria cobrindo as lacunas da observação e substituição de fatos isolados pelos sentidos por uma conexão contínua de consequências racionais. Kepler não estava interessado em uma substituição do fenômeno matematicamente caracterizado por suas causas absolutas, mas por um entendimento quantitativo vindo da percepção dos fatos. O físico não precisa preocupar-se, segundo Cassirer, com as forças originais que modelam o ser; sua preocupação é apenas substituir uma coleção de observações por uma estatística abarcante do universo (SF: 136). Em conclusão, Cassirer afirma: “De acordo com essa visão, a legítima função do conceito não consiste em revelar um caminho para uma nova realidade não sensorial; mas ele representa sua regra na concepção da realidade do empirismo matemático e lhe dá referida forma lógica” (SF: 136).

Como foi dito anteriormente, as hipóteses adequadas, em ciência natural, são formuladas tentando evitar a entrada de elementos metafísicos; logo, tendem acentuadamente, para uma fundamentação empírica “neutra”. Nessa perspectiva, os aspectos lógicos das hipóteses são deixados em plano secundário. A

“experiência pura”, segundo essa posição, impediria a entrada de elementos metafísicos na ciência natural, mas isso é um equívoco. É importante lembrar que, para Isaac Newton (1642-1727), a indução é fonte de certeza nos domínios da física. Kepler também a defendeu e preservou a investigação empírica contra as intromissões da metafísica; não obstante, ao mesmo tempo, ter reabilitado a teleologia platônica. “As idéias matemáticas são modelos eternos e ‘arquetipos’ de acordo com os quais, o divino arquiteto ordena o cosmo” (SF: 136).

A “essência” de um corpo atingida pelo processo de indução é mais do que uma generalização de um fato empírico, mas a aquisição dessa “essência” não pode levar o físico a uma hipótese especulativa. Veja o que diz Cassirer:

“Questão como atração recíproca de massas cósmicas, não pode ocupar o físico, como tal, e atraí-lo para hipóteses especulativas; a atração, para ele, nada mais é do que um certo valor numérico que contém a medida da aceleração de um corpo que passa por cada ponto do seu caminho. A **lei** da mudança desse valor de ponto para ponto, contém a resposta de **todas as questões** que possam surgir, com justificação científica, considerando a ‘natureza’ do peso” (SF: 137).

Essa lei, referida por Cassirer, é o núcleo da função que rege o fenômeno por ela modelado.

Em uma experiência científica, quando se descobre a função que rege um fenômeno, não há mais nada a ser procurado. Essa posição de Newton foi generalizada para toda ciência natural, e isto quer dizer que a física, sem hipótese, pretende realizar o ideal descritivo da mesma. Contudo, uma física baseada em definições que visam descobrir a essência dos processos naturais, apenas camufla o entendimento do fenômeno. Entretanto, se realmente as hipóteses, em

seu mais lato sentido, fossem alijadas da física e, esse método fosse levado às últimas consequências; estar-se-ia realmente cancelando todo o campo da percepção, e isto implicaria na rejeição da própria mecânica de Newton. Os conceitos de tempo e espaço absolutos são pontos de partida dessa mecânica, porém, se rejeita todo tipo de hipótese, conforme pretendia Newton, esses pontos devem também ser rejeitados.

O conceito de física como descrição do fenômeno se mostra ambíguo por pretender evitar hipóteses, no temor de que elas contenham elementos metafísicos. Porém, no estabelecimento dos fatos físicos, que pretenderiam ser puramente “empírico”, há pressuposições e, por conseguinte, hipóteses que, sem crítica, podem abrigar tais elementos temidos. Essa inconsistência constatada no desenvolvimento histórico da ciência ainda persiste hoje. Daí a necessidade de estabelecer clara e distintamente qual é a definição do fenômeno. Se ele é um objeto indefinido da percepção, ou, se ele é um objeto da física matematicamente construída (SF: 139).

Deve ser lembrado aqui o objeto de primeira e segunda ordem descrito no primeiro capítulo. É claro que Cassirer espousa a segunda alternativa, e assim permanece na obrigação de mostrar a possibilidade e as condições desta construção. E essa é uma nova questão epistemológica.

No desenvolvimento da Física, no que tange ao método, há para Cassirer, uma concordância metodológica entre Mayer<sup>24</sup>, Galileu e Newton. Daí a lógica usada não ser alterada quando se introduz o princípio de energia na remodelação



dessa ciência. A tarefa da física é **entender** o fenômeno e não **explicá-lo**, definindo que entender é relacionar diversos fenômenos entre si; e, explicar é procurar suas causas remotas. Não é possível saber o que é o calor, eletricidade, magnetismo e demais fenômenos em suas essências interiores, mas, pode-se conhecer a **relação** entre eles (SF: 139).

Qualquer fenômeno só é corretamente compreendido quando se consegue relacioná-lo quantitativamente com outro. Assim se expressa Cassirer:

“À luz dessa concepção, somente número, somente determinações quantitativas do ser, e por fim, do processo, permanecem como uma firme posse da investigação. Um fato é entendido quando é medido: ‘um simples número tem mais verdadeiro e permanente valor do que uma dispendiosa biblioteca de hipóteses’ “(SF: 140).

Um fenômeno é “explicado”, segundo a metodologia aqui comentada, quando ele é conhecido pelas suas relações. Logo, o conhecimento não pode ser de um fato isolado. A eletricidade estática já era conhecida desde a antiguidade através da experiência de atritar o âmbar, porém, esse fenômeno, por permanecer isolado, não constituía um conhecimento do fenômeno eletromagnético. Um fenômeno é realmente conhecido quando é tratado por um processo que o incorpora ao grupo dos demais fenômenos estruturalmente ligados a ele. E isso só alcança a plena evidência quando se possui sua expressão numérica. As constantes físicas que caracterizam os fenômenos não têm valor em si mesmas. Elas só são importantes quando estão relacionadas com outros valores presentes nas relações em que aparecem. Isso acontece porque elas estão relacionadas

---

<sup>24</sup> Julius Robert Von Mayer (1814-1878) demonstrou a equivalência entre calor e trabalho mecânico. Em 1842 estabeleceu o princípio da conservação da energia.

com certas proposições lógicas que são a base da enumeração e da medida. Uma hipótese adequada consiste em um princípio e um meio de se obter medidas.

Cassirer conclui:

“Ela [a medida] não é introduzida *depois* que o fenômeno já é conhecido e ordenado como grandeza, com a finalidade de adicionar uma conjectura referente às suas causas absolutas a guisa de suplemento, mas, sua introdução é para fazer possível a própria ordem. Ela não vai além do reino do factual, a fim de atingir um transcendental além, porém; ela aponta o caminho pelo qual avançamos da multiplicidade sensível das sensações para a multiplicidade intelectual da medição e do número” (SF: 141).

A posição mantida pelo químico alemão Wilhelm Ostwald (1853-1932), contra o uso de hipóteses aclara a posição de Cassirer. Esse químico faz distinção entre hipótese como fórmula ou como imagem. Quando todas as grandezas são mensuráveis está-se diante de uma fórmula que expressa uma lei da natureza. Se, as grandezas que aparecem na fórmula, não são passíveis de medição, então se está apenas diante de possibilidades matemáticas (SF: 141). Cassirer opõe a essa distinção argumentando ser errôneo supor que a obtenção de uma medida seja um procedimento puramente empírico. Mensurar um fenômeno é um resultado de uma operação conceitual que deve ser explicada em todos os detalhes, e isso não ocorre no reino das impressões sensoriais. Não há possibilidade de medir sensações tais como: calor, cores, etc., mas sim, objetos com os quais essas sensações estão associadas. Temperatura e pressão são conceitos e não cópias de percepções. Pode-se tomar como exemplo, a trajetória do conceito científico de temperatura. Ainda hoje, na linguagem comum, usa-se a palavra calor quando o correto seria a utilização do termo temperatura. Calor é uma sensação subjetiva que só pode ser medido através da temperatura.

A física trilhou um longo caminho, partindo da sensação de calor para estabelecer o conceito de temperatura, que visa quantificar esse fenômeno. Assim, foi estabelecida uma relação entre o calor e uma extensão graduada, ou seja; uma escala termométrica. Se certo volume de mercúrio corresponde a um ponto da escala denominado de zero grau e, em outro ponto da mesma escala, corresponde um volume maior do mesmo mercúrio, chamado de cem graus, com divisões intermediárias, então se assume que a temperatura varia linearmente, ou seja, é uma grandeza diretamente proporcional. Se usa do outro líquido, que não o mercúrio, deve-se utilizar uma função mais complexa, que contemple a variação de volume do novo líquido, pois cada líquido tem um índice de dilatação diferente. Esse simples exemplo de confecção de um termômetro mostra que a determinação quantitativa de um fenômeno físico é estabelecida dentro de uma rede de pressuposições teóricas (SF: 142).

Para Cassirer, o discernimento entre um fato físico e uma teoria física, deve ser estabelecido de uma maneira simples e clara. Uma coisa é a ingênua observação do fato, esse tipo de abordagem não produz ciência. Outra coisa, bem diferente; é uma observação conduzida e controlada quantitativamente em um laboratório, isto pode produzir ciência. Pode-se exemplificar essa questão com a lei dos gases de Boyle-Mariotte. Essa lei estabelece que a uma temperatura constante, a pressão e o volume de um gás são inversamente proporcionais. Isso significa que, quando o volume do gás dobra, a pressão se reduz pela metade e quando o volume triplica, a pressão tem a redução de um terço e assim sucessivamente.

Quem faz uma experiência científica não pode estar preso às observações como elas inicialmente são percebidas. O cientista tem ao seu dispor instrumentos que aumentam, em muito, sua capacidade de percepção. Assim, ele pode medir e perceber a variação das medidas através desses instrumentos. A variação ou permanência da coluna de mercúrio no termômetro lhe dá a temperatura, a mudança do ponteiro no manômetro lhe dá a pressão. O juízo emitido pelo investigador não é sobre o que se passa no instrumento, e sim sobre o que ocorre nos objetos medidos. Isso é possível porque foi estabelecida uma relação, entre o que ocorre no instrumento e o que ocorre no fenômeno que se pretende medir.

A multiplicidade sensorial do fenômeno foi substituída por uma multiplicidade ideal. Assim, a variação do volume de mercúrio no termômetro mede a temperatura do corpo. Observa-se que o “fenômeno”, aqui como objeto da percepção, já não é algo sensorial, mas está modelado objetivamente pelo instrumento de medida. “A função característica e peculiar do conceito científico é encontrado nessa *transição* do que é diretamente oferecido na percepção do elemento individual, para a forma que ele ganha finalmente na proposição da física” (SF: 143).

Assim, os fenômenos serão controlados somente quando forem quantificados e medidos, mas para medi-los existe a necessidade da utilização de unidades, pois, sem uma unidade constante não faz sentido medir. No entanto, qualquer unidade que seja adotada é estabelecida através de postulados e definições; logo, não faz parte da percepção. Um exemplo marcante está na definição de espaço e tempo, especialmente desse último. Um aprofundamento

sobre o tema foge ao escopo da presente pesquisa. Entretanto, algumas considerações serão necessárias.

No caso da medida de tempo é descartada qualquer ajuda sensorial. Quando um espaço empírico qualquer é medido, a intuição percorre esse espaço do ponto inicial até o ponto final. No caso do tempo, não são dados esses dois pontos. O único meio que pode ser utilizado para medir o tempo é através de outro conceito, a velocidade. Se dois pontos-massa percorrem espaços iguais, eles têm que fazer o percurso em tempos iguais (SF: 145).

A física contemporânea possui maneiras precisas para estabelecer a unidade de medida para tempo e espaço. Unidades de espaço e de tempo são agora definidas através de fenômenos periódicos dos elementos subatômicos. Porém, qualquer que seja o processo, há sempre a pressuposição de indestrutibilidade e inalterabilidade do fenômeno que é utilizado como unidade. As medidas de um fato físico servem para estabelecer uma lei que posteriormente é verificada através das medidas de outros fatos. Esse círculo lógico parece uma petição de princípio, mas não é. Quando uma lei é estabelecida, isto não é feito de maneira definitiva, pois se trata apenas de uma posição inicial (SF: 146). Seu estabelecimento é uma pergunta inicial e não uma resposta final. Um conceito em física não é baseado em conteúdos reais, e sim, em uma conexão articulada com outros conceitos. Assim, os conceitos da física são extensão e continuação dos conceitos da matemática. A confirmação de um conceito da física não pode ser feita isoladamente, deve ser efetuada dentro de um todo teórico mais abrangente e complexo. Não há conceito físico separado de fato físico. Só existem os fatos através da totalidade dos conceitos e esses só surgem através da totalidade da

experiência (SF: 147). Daí Cassirer afirmar: “É erro fundamental do empirismo Baconiano não compreender esta correlação; ele concebe ‘os fatos’ como entidades isoladas, existindo por si mesmas, que o nosso pensamento tem somente que copiar, tão fielmente quanto possível” (SF: 147).

Em seguida, Cassirer pode concluir:

“Experiência ‘pura’, no sentido de uma mera coleção indutiva de observações isoladas, nunca pode fornecer o andaime da física porque lhe é negado o poder de uma forma matemática” (SF: 147).

Vale aqui ressaltar o aparente paradoxo do processo. Quanto mais o cientista trabalha na elaboração de uma teoria, mais se afasta da intuição de uma sensação imediata. Por isso, ele acaba sendo acusado de estar simplesmente substituindo “fatos” por “símbolos”. Com isso, se estabelece uma porta aberta para o nominalismo da escolástica se instalar na física. Entretanto, a acusação não procede, pois, ela nasce da maneira errônea de entender a abstração na formação do conceito. Cassirer relembra aqui o núcleo da autêntica maneira de formar conceitos.

“Não estamos interessados com a separação do elemento comum de uma pluralidade de impressões similares, mas, com o estabelecimento de um princípio pelo qual sua diversidade apareceria. A unidade do conceito não tem sido encontrada em um grupo fixo de propriedades, mas em uma regra que representa a mera diversidade como uma sequência de elementos de acordo com a lei” (SF: 148).

Para Cassirer, a constituição de séries matemáticas, como abordadas no segundo capítulo; é um arranjo ideal e necessário para expressar os conceitos da física. Assim como nas séries matemáticas, o mais importante não é o elemento

em sua individualidade, assim também, nas séries de fatos físicos, o fato isolado é carente de significado. Ele só tem significado quando inserido em um sistema de constantes físicas.

“A fim de distinguir um objeto dentre outros e subsumi-lo sob um fixo conceito de classe, precisamos atribuir-lhe um volume definido e uma massa definida, uma gravidade específica definida, uma capacidade calorífica definida, uma eletricidade definida, *etc.*” (SF: 148).

Por esses números distingue-se um objeto dos demais, e eles não são dados na impressão sensorial. As constantes que são expressas por estes números são obtidas teoricamente e impostas à multiplicidade da percepção. Só se tem o objeto da física quando o objeto das impressões é transformado em uma determinação serial. “A ‘coisa’ agora é mudada de uma soma de propriedades para um sistema matemático de valores que fazem referência a alguma escala de comparação” (SF: 149).

Com esse arranjo, o caos das impressões dos sentidos é transformado em um sistema de números, que é pleno de significado dentro do sistema de conceitos e, por sua vez, foram estabelecidos por um padrão de medidas. Assim, fica justificado plenamente o afastamento das “objetividades” das impressões sensíveis iniciais em direção aos “símbolos” matemáticos. O que é perdido com as primeiras impressões sensoriais é compensado com ganho do estatuto dos membros do sistema.

A relação fundamental entre os fatos físicos e a teoria física pode ser rastreada e confirmada através da própria teoria psicológica do conceito. Cassirer a denominou de “conexão aperceptiva” (SF: 149). É a expressão individual da

totalidade da experiência que estabelece uma “unidade de consciência”, sem a qual o indivíduo não perceberia o objeto. Contudo, somente quando se obtém o objeto mensurado é que ele ganha padrão, forma e propriedades. Os parâmetros massa, movimento, energia, etc., que são expressos por medidas, são os elementos das séries que estabelecem o ‘ser’ para o cientista. Cassirer conclui:

“Quanto mais profundamente entramos nesse procedimento, tanto mais claro se torna o caráter do conceito científico de coisa e sua diferença do conceito metafísico de substância. A ciência natural, em seu desenvolvimento tem em todo lugar usado a *forma* deste último conceito, todavia em seu progresso tem preenchido essa forma, com um novo conteúdo, e eleva-o para um novo nível de confirmação” (SF: 151).

Aqui se constata que, mesmo utilizando o termo substância, os cientistas de diversas áreas estão pensando em outro conteúdo, mas, se o conteúdo já foi alterado através de uma discreta “desubstancialização”, não justifica mais a manutenção do nome com suas conotações metafísicas.

### **3.2.2 Evolução do conceito de matéria na Física**

Sem dúvida alguma a matéria constitui o principal princípio da realidade natural, a saber, os corpos. Seu conceito, tanto no aspecto filosófico como científico, sofreu, ao longo do tempo, progressivas mudanças em direção a um esvaziamento do seu significado inicial. Na ciência, a rigidez e inércia tradicionais foram cedendo lugar a uma abordagem funcional expressa por leis. Já na filosofia moderna, Schopenhuer a considerou como “a propriedade de fazer efeito (*wirksamkeit*)” (Schopenhuer, 2005, p. 54). Na ciência Ostwald considerou o conceito de matéria inútil para a ciência da natureza e propôs sua substituição



pelo conceito de energia, assim, nos domínios científicos o energismo realiza o ponto de vista de Schopenhuer.

O conceito de substância, ainda que latente marca a distinção entre a narrativa mítica sobre o mundo e o discurso filosófico. Segundo Cassirer:

“A concepção lógica de substância permanece no pináculo da visão científica do mundo em geral. É o conceito de substância que, historicamente marca a linha divisória entre investigação e mito. A filosofia tem sua própria origem nesta realização” (SF: 151).

O princípio do ser é assim concebido como um todo ordenado, do qual se pode derivar a multiplicidade da realidade sensorial. Para os Jônios, a substância era concebida como algo passível de confirmação sensorial, mas logo se evidenciou a inadequação da escolha privilegiada de um dos elementos da *physis* como *arché*. O *apeíron* de Anaximandro já sinalizava a tendência em direção à caracterização do desenvolvimento abstrato de substância em oposição às definições em termos de elementos materiais. Para Cassirer:

“O reino material, em geral, não é abandonado; ele é, pelo contrário, precisamente a pura abstração da própria matéria que ganha a primeira expressão na infinita e indeterminada substância de Anaximandro” (SF: 151).

Essa unidade pensada por Anaximandro está evidentemente ligada a uma antecipação da explicação lógica, sem apresentar ainda uma fundamentação adequada. Para o *apeíron* ser algo homogêneo, deveria possibilitar o cancelamento das propriedades opostas da multiplicidade das coisas por ele abarcadas. Anaxágoras explica as qualidades particulares com a introdução da noção de movimento. Assim, as múltiplas propriedades dos corpos são

conduzidas aos seus fundamentos de origem, tais como: úmido e seco, claro e escuro, quente e frio, etc. O que faria a diferença entre os objetos dos sentidos seria a predominância de uma das propriedades originais. A doutrina é sumaria da na tese: “Tudo está em tudo” (SF: 152).

As propriedades em Anaxágoras são transformadas em causas substanciais. Essa hipostatização<sup>25</sup> das qualidades sensíveis, ora aparecem, ora desaparecem, dependendo da presença preponderante de uma ou de outra propriedade. Essa doutrina está tentando estabelecer um ser permanente sem ir além daquilo que é “dado”. Tal posição marca um passo a frente entre os Jônios. A função que, para eles, era exercida por água, ar, etc., é substituída pela relação entre as propriedades através de uma função que estabelece no corpo, a preponderância de uma propriedade sobre as demais. Para Cassirer:

“A hipostatização destas propriedades leva suas naturezas fixas; é verdade que elas ganham uma diferente significação *metafísica*, mas em princípio, elas não vão além do caráter de coisas sensíveis” (SF: 153).

Em Aristóteles, a hipostatização das propriedades continua. A diferença é que, no sistema aristotélico, as infinitas partículas de Anaxágoras são transformadas em meras propriedades tais como frio e calor, úmido e seco, etc., geradas da combinação elementos: água, terra, ar e fogo. Cassirer tenta mostrar que a emergência do conceito de substância constitui na filosofia grega um processo cuja origem é anterior à sistematização proposta por Aristóteles. Em suas palavras: “Assim a estrutura dessa física descansa sobre o mesmo

---

<sup>25</sup> O termo hipostatização é derivado hipóstase ( *hypostasis*) que consiste em transformar uma palavra ou coisa em substância.

procedimento que converte propriedades relativas da sensação em propriedades absolutas das coisas” (SF: 153).

Se for tomada em consideração a história da ciência natural, constata-se que a alquimia e a química, no período medieval, só fazem sentido quando o sistema aristotélico é pressuposto. As qualidades podem ser transformadas em essências e, quando separadas de um corpo, serem transferidas para outro. A distinção entre o estado sólido, líquido e gasoso é estabelecida através da presença de certa propriedade inerente a cada estado (SF: 154). A mudança de estado significa a perda de uma propriedade e aquisição de outra. Os alquimistas pretendiam transformar metais menos “nobres” em ouro. O mercúrio seria transformado em ouro se fosse possível retirar dele os “elementos” que estabelecem sua fluidez e volatilidade (SF: 154). Se esses “elementos” fossem substituídos por outros, conseguir-se-ia o ouro.

Já nos tempos modernos, Francis Bacon (1561-1626) mantém a mesma abordagem em sua física, ou seja, os elementos comuns podem ser separáveis nas coisas. Assim, por exemplo, a forma de calor existe com algo peculiar que está presente em todas as coisas quentes. A tarefa do físico seria reduzir o complexo sensorial das coisas em um feixe de qualidades abstratas. Outro exemplo significativo aparece na química, quando o elemento enxofre passa a ser considerado como uma expressão da propriedade de combustão dos corpos. De igual modo, o sal foi considerado como a expressão da solubilidade dos corpos. Já o mercúrio, expressa toda a propriedade dos metais. Cassirer sintetiza:

“A propriedade de combustão que percebemos sensorialmente em vários corpos é transformada, pela

admissão do flogisto<sup>26</sup>, em uma substância particular que está misturada com os corpos; e, dessa admissão, antes de Lavoisier, toda a estrutura da química segue como uma necessidade interna”. (SF: 155).

Na filosofia, para resolver os desafios deixados por Parmênides e Zenão (515-450 a.C.) sobre a indivisibilidade infinita do espaço, Demócrito (460 -360 a.C.) chegou à elaboração do conceito de átomo, que por sua vez, exigia o conceito de vazio para justificar o seu movimento. O conceito de espaço vazio (*kenon*) primordial no sistema de Demócrito, segundo Cassirer, remonta aos pitagóricos para os quais o número, além do seu aspecto aritmético, tinha também um aspecto geométrico, por conseguinte espacial (FFS: 333). A fim de conseguir a passagem do número para existências concretas faz-se necessário o conceito de espaço que deve ser entendido segundo Cassirer com “uma imagem pura do número” (SF: 156). Enquanto Tales (624-545 a.C.) e Anaxímenes (596-525 a.C.) tomavam com princípio um elemento físico, Pitágoras acreditava que esse princípio era o número. Com já referido, o ser não é mais procurado nas coisas sensíveis, mas é revelado no conceito puro de número. Para os pitagóricos é “sobre o número que descansa toda a conexão e harmonia interior das coisas, precisamente por esta razão, ele é caracterizado como substância das coisas, pois somente ele fornece à elas um definido e conhecível caráter” (SF: 155). Os gregos posteriores souberam descartar os aspectos místicos inerentes ao conceito de número defendido pelos pitagóricos, com o princípio de todas as coisas.

---

<sup>26</sup> Na química, anterior a Antoine L. Lavoisier (1743-1794), flogisto era um fluído hipotético inerente a todo corpo inflamável. Ele causava a combustão quando deixava o corpo.

Na construção do atomismo não há qualidades tais como: amargo, doce, frio, quente, etc. Em seu lugar entram determinações quantitativas exatas e as propriedades sensórias foram afastadas, pois elas não contêm “certeza” objetiva, apenas uma “opinião” subjetiva. Cassirer afirma:

“O abstrato esquema-número dos pitagóricos é agora, de qualquer maneira, suplementado com um novo elemento que o capacita para que ele desenvolva o seu pleno efeito. A fim de avançar do número para a existência física é necessário ter a mediação do *conceito de espaço*. O espaço, contudo, é aqui tomado em um sentido que o transforma na pura imagem do número. Ele representa todas as propriedades e preenche todas as condições de número” (SF: 156).

No sistema de Demócrito, os átomos são apenas representações abstratas da realidade física, e isto na medida em que eles representam determinações de grandezas. O próprio Galileu Galilei (1564-1642), no início da ciência moderna, assim entendia o conceito de átomo (SF: 156). Para ele, o conceito de matéria se reduz à forma, lugar e movimento. As demais propriedades desse conceito podem ser afastadas sem causar qualquer prejuízo para experiência. A sensação do branco, amargo, liso, etc., não tem nenhum correlato objetivo fixo. Cassirer afirma:

“A substância do corpo físico é exaurida na totalidade das propriedades que a aritmética e a geometria e a pura teoria do movimento, que remonta a ambas, podem descobrir e estabelecer nele” (SF: 156).

Com a aceitação do atomismo o problema está bem colocado em termos gerais, porém, ainda carece de uma solução específica definitiva. A razão pela qual os átomos de Demócrito têm diferentes formas e tamanhos não é explicada. A relação dinâmica entre os átomos também constitui um problema. As oposições

como duro e macio, leve e pesado são mantidas através do condicionamento matemático, mas, mesmo assim, constituem um resíduo das propriedades estabelecidas pelos sentidos. Esses dualismos, uma vez admitidos, são causa da antinomia entre o conceito físico de **ser** e a lei física do **processo**.

Com relação ao movimento tem-se o seguinte problema. A lei da conservação da energia exige que ela não seja alterada no processo de transferência do movimento de um corpo para o outro. A aplicação dessa lei entre os átomos é inadmissível, pois sendo eles absolutamente “duros”, ou seja, inelásticos, não haveria possibilidade de transferência de energia. Logo, esse processo não poderia lhes ser aplicado. Um outro problema vem da continuidade do processo. Quando um corpo mais lento é atingido por um corpo mais rápido, após a colisão ambos avançam com a mesma velocidade. Verifica-se uma adição algébrica das velocidades. Um móvel perde e o outro ganha igual quantidade de velocidade. No momento do impacto, não havia como definir a velocidade, e ela é fundamental na determinação da energia, pois o cálculo apresenta uma indeterminação de zero dividido por zero. O conceito de velocidade média é para esse fim inoperante, o que resolve é o conceito de velocidade instantânea, que usa a teoria de limite quando o dividendo e divisor tendem a zero. Hoje, no mundo atômico, colisões físicas são sem sentido, pois átomos são construções racionais do pensamento e não se pode projetar neles propriedades dos corpos sensíveis. Do ponto de vista da teoria do conhecimento, esse procedimento deve ser abandonado. Com o advento da teoria dinâmica da matéria de Roger J. Bosovich (1711-1787), em vez de uma extensa e indivisível partícula, é apenas postulado um simples ponto de força. Assim as propriedades sensíveis dão lugar a uma

força. Cassirer afirma: “A *grandeza* e a *forma* dos átomos agora desapareceram; o que os diferencia é apenas a posição que eles mutuamente determinam dentro de um sistema dinâmico de ação e reação” (SF: 159). E conclui: “O átomo, que em sua origem remonta ao conceito de número, aqui volta à sua origem, depois de múltiplas transformações; ele nada mais é do que um membro de uma multiplicidade geral. Todo conteúdo que podemos subscrever-lhe brota das relações das quais ele é o centro intelectual” (SF: 159). Não é escopo do presente trabalho explicitar todos os aspectos da nova teoria da formação dos conceitos, mas apenas o seu aspecto relacional, por ser esse, o fundamento para a substituição do conceito de substância pelo de função. Esse aspecto relacional é que possibilita a “dessubstancialização” no conceito das coisas que Cassirer explicita na história da formação dos conceitos nas teorias da Física e da Química.

Assim a transformação de átomo na física moderna confirma a sua natureza relacional. Esse processo pode ser constatado no conflito entre o atomismo e o energismo. Cassirer cita Ludwig Boltzmann (1844-1906), que tentou derivar a hipótese atômica da ciência natural teórica. Para isso, ele usa equações diferenciais.

“Se nós não nos enganamos concernente ao significado de uma equação diferencial, ele explica-nos, não podemos duvidar que o esquema do mundo, que é assumido com ela, é, em essência, de estrutura atomística” (SF: 159).

Assim como uma equação diferencial parte de um valor inicial e determina toda a curva de um dado fenômeno, já particularizado entre outros similares pela constante de integração, analogamente, o átomo é considerado como membro de uma multiplicidade geral com um conteúdo composto de relações das quais ele é

o centro (SF: 159). O procedimento do cálculo infinitesimal exige a transição de um corpúsculo extenso para um ponto de massa e isso tem uma analogia com a “imagem” do átomo. “Nesse sentido ‘átomo’, de acordo com o significado físico fundamental, não é definido e postulado como parte da matéria, mas como um objeto de possíveis mudanças. Ele é considerado somente como um ponto intelectual de aplicação para possíveis relações” (SF: 161). Segundo Boltzmann, os átomos não são dedutíveis de fatos empíricos, mas desse método de trabalho da física exata. No que diz respeito aos átomos, não é interessante aqui considerá-los como o fundamento último das coisas, mas apenas no aspecto relacional do qual qualquer processo possa ser deduzido. Essas relações não constituem um substrato material, mas uma permanente forma de mudança. Cassirer compara o conceito de átomo com o conceito de inércia que foi inicialmente considerada como propriedade dos corpos e posteriormente deduzida das leis da eletrodinâmica: “Assim, (...) o átomo, que era material até aqui, se divide e reduz a um sistema de elétrons” (SF: 162). E mais: “O elétron individual não tem mais qualquer substancialidade no sentido de que ele *per se est et per se concipitur*; ele ‘existe’ somente em sua relação com o campo, como um ‘lugar singular’ nele” (DI:178).

Com o advento da radioatividade, o conceito de matéria foi alterado; modelos novos foram criados, mas sempre expressando posições de relacionamento, e não mais como um substrato imutável da realidade. Conforme visto, o conceito de átomo tem mudado muito através dos tempos, porém; sua função de definir as condições de conhecimento permanece imutável e frutífera.



Semelhante ao desenvolvimento do conceito de matéria ocorreu com o conceito de éter. Por sua definição, ele tem que ser um fluído perfeito e, ao mesmo tempo, um perfeito corpo elástico. Com isto, o éter é abordado analogamente aos objetos dos sentidos. Assim, têm-se duas direções a seguir: considerar o éter como um fluído perfeito ou como um corpo perfeitamente elástico. Porém, não há dilema se considerado como um símbolo de relações físicas e não como um meio material para a propagação da luz. Sob esse aspecto, Einstein mostrou que ele não existe (Einstein, 1983, p.12). Quando coordenadas são atribuídas aos pontos do espaço as distâncias entre eles são apresentadas por determinações numéricas e, isto é a idéia de éter, ou seja, uma rede de números.

“Espaço ‘vazio’ que somente representa um princípio de arranjo é agora, em certo sentido, coberto com riqueza de outras determinações; essas, entretanto são todas mantidas juntas pelo fato de que certas dependências funcionais subsistirem entre elas. Tudo que a física ensina sobre o ‘ser’ do éter pode, de fato, ser reduzido a juízos sobre tais conexões” (SF: 163).

O conceito de substância sofreu mudanças desde sua origem especulativa até seu uso atual, mas; o que fica patente nesse processo é o progressivo empobrecimento da realidade por ele fundamentada. Todas as propriedades dos objetos tais como: cor, gosto, cheiro etc. são perdidas, além da forma e da extensão. O corpo passa a ser um mero ponto. Diante do exposto, a meta da ciência natural não pode ser, com alguns advogam, uma simples cópia da realidade externa. De fato, além dos dados dos sentidos, a ciência cria uma representação da realidade de acordo com certas leis.

Todo trabalho de um cientista seria em vão se ele apenas reproduzisse uma cópia da realidade. O mundo seria apenas duplicado e não interpretado. Em realidade, o que um cientista faz é obrigar a natureza falar dentro de um esquema, matemático. “Átomo e éter, massa e força são exemplos de tais esquema e preenchem seu propósito tanto melhor, quanto menos eles contiverem conteúdo de percepção direta” (SF: 165).

Um fato e sua representação não criarão um dualismo metafísico se for em vazados no esquema matemático, pois, nele, o que se expressa tem apenas caráter relacional. Uma coisa pode perder todas as suas propriedades, mas, sob esse esquema; quanto maior a perda em propriedades, maior será o ganho em possibilidades de relações. Desse modo, uma coisa pode ser **plenamente compreendida**, uma vez que, ligada a outras, conecta-se com a totalidade da experiência. Cassirer relata:

“Os objetos da física: matéria e força, átomo e éter não podem mais ser mal entendidos como novas realidades de investigação cuja essência interior é para ser penetrada, uma vez que eles são reconhecidos como instrumentos produzidos pelo pensamento, com o propósito de compreender a confusão dos fenômenos como um todo ordenado e mensurável” (SF: 166).

Sem dúvida, Demócrito foi o criador do primeiro esquema de concepção científica do mundo. Ao criar seu sistema, compreendeu um problema filosófico que está latente em qualquer sistema científico. Os átomos deveriam movimentar, mas, movimento requer o vazio que nunca é dado por percepções sensoriais. Logo, o sistema eleático que admitiu apenas o **ser** é insuficiente. O conceito de **não-ser** é fundamentalmente necessário, e por isto, inevitável para uma

representação adequada na ciência natural. Sem ele, não seria possível entender o fenômeno na sua multiplicidade e mutabilidade. Assim entendido, o **não-ser** perde toda a construção dialética e protege a física de construir qualquer idealismo especulativo. Em realidade, a propriedade dos corpos percebida através dos sentidos não exaure o todo de sua objetividade. Dado que os sentidos são individuais e limitados, somente podem fornecer uma inteira descrição do corpo, as ligações estabelecidas por funções matemáticas.

Segundo Cassirer, Galileu se une a Arquimedes (287-212 a. C) e a Demócrito; ao primeiro pela física e ao segundo pela filosofia. Galileu estabeleceu que o conceito de natureza tem caráter de necessidade. Além do mais, para ele, o conceito de verdade difere do conceito de realidade. As propriedades da espiral de Arquimedes permanecem verdadeiras mesmo que nenhum corpo na natureza se movimente segundo ela.

Quando Galileu fundamentou sua dinâmica, foi suposto o movimento uniformemente acelerado de um determinado ponto. Depois disso, ele deriva todas as consequências teóricas desta posição. Se tal movimento não for mais tarde confirmado, essa posição não perde sua validade, pois, nela não está a garantia de uma real existência.

O mesmo acontece com a lei da inércia, que tem um caráter eminentemente matemático e faz parte do método de resolução dos problemas do movimento. As suas condições não vieram da realidade empírica, simplesmente porque lá, elas não existem.

Para Galileu, a constituição material de um corpo é “acidental” e assim , não pode ser invocada como prova contra o princípio da inércia. Cassirer liga Galileu a Demócrito.

“Inércia é, para Galileu, o que o espaço vazio é para Demócrito, ou seja, um postulado que não podemos dispensar na exposição científica dos fenômenos , e não, um processo concreto e sensível da realidade externa. Ele [O postulado] denota uma *idéia* concebida com o propósito de ordenar os fenômenos, todavia não permanece no mesmo plano desses fenômenos” (SF: 169).

O conceito de matéria na física deve ser visto sob a mesma ótica. A matéria não é um objeto de uma percepção e sim de uma concepção. Quando , espaço e matéria estão em questão, esses conceitos sempre são transformados em símbolos geométricos. As concepções de forma e volume no mundo real são projetadas e identificadas com as realidades sensíveis. São esses corpos formados pelas projeções de forma e volume que se admite moverem no espaço. As propriedades sensíveis não mais estão neles. O “peso”, que parecia inerente ao volume, se transforma em massa, ou ainda, no que tange ao movimento, em centro de massa. Cassirer conclui: “Matéria tornou-se *idéia*, sendo crescentemente limitada por concepções ideais que são produzidas e confirmadas pela matemática” (SF: 170).

### **3.2.3 Espaço, tempo e energia**

Sendo a mecânica clássica um caso particular de uma teoria bem mais geral, a mecânica quântica relativista, é natural a evolução na física. As forças que variam com a posição das partículas em sua vizinhança, como, por exemplo, as forças gravitacionais, bem como a determinação do movimento dessas

partículas, trouxeram consigo o conceito de trabalho e energia cinética. O teorema que relaciona trabalho com a energia constitui o ponto de partida para ampla generalização da física. A mecânica clássica se estruturou sobre os conceitos de espaço e tempo, mas sua estrutura poderia ser estabelecida de outra maneira.

À primeira vista, espaço e tempo parecem ter sido derivados das coisas concretas, uma vez que eles não apresentam desligados de nossas sensações, mas somente quando são abordados dentro das determinações matemáticas é que suas verdades são bem fundamentadas (SF: 170 e 171).

As definições de espaço e tempo são as que determinam o problema da objetividade em geral. Há uma oposição entre as determinações de espaço e tempo que vem dos sentidos, e daquela que vem da abordagem matemática. A questão retorna aqui a posição de Newton que fundamentou sua física em espaço e tempos absolutos. O que deve significar espaço e tempo absolutos, se não se tem nunca uma experiência que os fundamente? Pode essa posição ser verdadeira quando lhe é vedada uma confirmação experimental? Estas são importantes perguntas feitas por Cassirer (SF: 171).

No curso da história das ciências naturais a questão tem sido tratada em termos ontológicos radicalizando os conceitos de “absoluto” e “relativo”. Mas, é fácil perceber que, quando Newton considera espaço e tempos absolutos, ele não exclui toda e qualquer espécie de relatividade dos mesmos. Isso aparece na representação matemática na qual espaço e tempo não são considerados em si mesmos. Não há sentido em conceber um “lugar” sem ao mesmo tempo relacioná-lo a outro. Um **aqui** só ganha significado com um **ali**. O mesmo vale para o tempo.

Um **agora** só tem significado através de um **depois** ou mais tarde (AFFS: 54 e 55

Vol. I). Nesta colocação, Cassirer segue Hegel e conclui:

“Nenhuma determinação física que venhamos adotar em nossos conceitos de espaço e tempo pode impugnar estes conceitos lógicos fundamentais. Eles são e permanecem *sistemas de relação* no sentido de que, toda construção particular denota sempre unicamente um ponto individual que ganha sua plena significação, somente através de sua conexão com a totalidade dos membros da série” (SF: 172).

O movimento absoluto não deve ser entendido como contraditório. Nenhum físico interpreta movimento sem qualquer sistema de referências. Cassirer afirma:

“O postulado do movimento absoluto não significa a exclusão de qualquer relação, mas antes contém uma suposição de natureza correlativa que é aqui determinada como ‘puro’ espaço, separado de todo conteúdo material” (SF: 173).

Diante disso, é necessário explicitar qual o tipo de espaço que os físicos utilizam: o espaço constituído por um agregado de impressões sensoriais ; ou aquele construído por processo intelectual? Evidentemente , a última opção foi escolhida; mas, ela levanta o problema da mediação entre a construção ideal da física e os seus resultados. Cassirer pondera:

“Os elementos sensoriais e intelectuais permanecem, de início, em oposição abstrata e requerem uma unificação sob um ponto de vista geral para determinarem suas partes num único conceito de objetividade” (SF: 173).

Qualquer movimento só faz sentido quando é analisado dentro de sistema de referência. No caso da inércia, o movimento retilíneo uniforme deixa de ter sentido se a terra não for tomada com referência, ou qualquer outro sistema rigidamente ligado a ela. Como a terra também está em movimento, assim, para que seu movimento tenha um referencial absoluto, adotaram-se “estrelas fixas”

com ponto de referência, e assim, tratam-se corretamente os fenômenos do movimento dentro da precisão que os juízos empíricos comportam (SF: 173).

As leis teóricas da física expressam casos que nunca foram dados na experiência, uma vez que a lei expressa o objeto da percepção no seu limite ideal. Um bom exemplo está no cálculo da energia fornecida por um gás qualquer através do modelo de gás ideal. O tratamento vetorial do impacto dos diversos tipos de moléculas seria inviável através das leis de Newton. Com uma abordagem estatística, o cálculo torna-se possível e correto, independentemente do que se passa em realidade dentro do recipiente. Sobre a independência do movimento Cassirer cita livremente Duhem:

“O conceito de movimento retilíneo uniforme é aqui introduzido no cinemático sentido abstrato, ele não está ligado a nenhum corpo material, mas meramente ao esquema oferecido pela geometria e a aritmética. Se as leis que nós deduzimos de tais idéias e concepções são aplicáveis ao mundo da percepção, isso precisa ser decidido inteiramente pela experiência; o significado lógico e matemático de uma lei hipotética é independente dessa forma de verificação no dado real” (SF: 175).

A lei da inércia pode prescindir do referencial das “estrelas fixas” sem nenhum prejuízo para o seu conteúdo, o referencial dela passa a ser o espaço absoluto. Cassirer cita extensivamente a “experiência intelectual” com parte do método geral da física como defendido por Ernst Mach<sup>27</sup> (1838-1916). Não cabe neste trabalho detalhar a posição defendida por Mach. Porém, quando espaço e tempo são considerados como idéias matemáticas, evitam-se todas as objeções feitas contra a lei da inércia. Espaço e tempo absolutos envolvem problemas de

---

<sup>27</sup> Mach foi professor de física em Graz e em Praga, (1867 a 1895) em Viena (1895 a 1901) onde também lecionou filosofia. Seu interesse foi a análise da natureza e o papel desempenhado por conceitos e princípios físicos da mecânica.

existência semelhante ao número puro da aritmética representado em uma reta. O próprio Galileu enfatizou que, na física, o movimento diz respeito à matemática pura, e nada tem a ver com a matemática aplicada.

“O conceito de movimento uniforme e de movimento uniformemente acelerado não contém nada de propriedades sensoriais de corpos materiais, mas meramente define uma relação entre grandezas espaciais e temporais que são geradas e relacionadas umas as outras de acordo com um princípio ideal de construção” (SF: 181).

Desse modo, pode-se contar com um sistema conceitual de referência no qual se coloca toda a determinação requerida. Há uma criação de um “sistema inercial” e uma escala inercial de tempo.

“Assim não há hipostatização do espaço e do tempo absolutos em coisas transcendentais, mas ao mesmo tempo, ambos permanecem com *funções* puras, pelas quais um exato conhecimento da realidade empírica é possível. A fixidez que precisamos atribuir ao original e unitário sistema de diferenças não é uma propriedade sensorial, mas lógica. Isto significa que um conceito é estabelecido a fim de considerá-la idêntica e imutável através de toda transformação de cálculo” (SF: 182).

Contudo, só a experiência é capaz de dizer se esse esquema ideal pode ser aplicado à realidade das coisas e dos processos com sucesso. É atribuído a um corpo um repouso “absoluto” ou uma “absoluta” fixidez, mas, sabe-se que isto é verdade apenas com certa aproximação. O que vale para o espaço vale para o tempo. Dentro dessa perspectiva sempre está aberta a possibilidade de escolher um novo ponto de referência que seja mais exato no sistema de observação ou dedução.

“Essa relatividade é, em verdade inevitável, pois ela descansa no verdadeiro conceito de objeto da experiência. Ela é a expressão da necessária diferença que permanece



entre as leis conceituais exatas, que formulamos, e a suas empíricas realizações” (SF: 183).

Do exposto decorre que, espaço e tempo absolutos não estão completamente isentos de toda e qualquer relatividade, mas o sistema pelo qual se orienta não é um algo individual e perceptível. Ele é um sistema de regras teóricas e empíricas sobre as quais a totalidade de fenômenos é concebida de forma independente.

Cassirer lembra que as questões atinentes ao espaço e tempo absolutos tiveram sua origem na filosofia moderna com Leibniz. Para esse último, extensão espacial e determinação temporal são impostas ao sujeito, mesmo que nenhum processo de regularidade se verificasse na natureza, ou ainda, que não seja verificada a fixidez ou imobilidade de qualquer corpo. Esse fato possibilita uma posição vantajosa, pois, conhecendo as regras de um movimento não uniforme, é possível medi-lo através de um movimento uniforme apenas concebido. Essa posição é expressa na fala de Teófilo (Leibniz) no capítulo XIV de *Novos ensaios sobre o entendimento humano* (Leibniz, 2004, p. 131).

Ainda sobre o espaço e o tempo, Cassirer chama atenção para a mecânica de Rudolph H. Hertz (1857-1894), onde traz a mais clara expressão moderna da relação entre teoria e experiência. Para Hertz, afirmações sobre espaço e tempo têm o sentido idêntico ao que Kant lhes atribuiu. Não existe nessas afirmações nenhum apelo a corpos sensíveis.

Quando unidades fixas de medida são tomadas, um princípio de correspondência é obtido, e, por esse meio, as sensações ou impressões são traduzidas em linguagem de símbolos.

“Assim, enquanto uma perfeita definição de todos os elementos possa ser atingida com estruturas gerais das leis da intuição e pensamento, no campo dos fenômenos empíricos isso é meramente postulado. A ‘realidade’ de nossas experiências é medida pela ‘verdade’ de nossos conceitos e princípios que são abstratos e dinâmicos” (SF: 185).

A ordem cinemática no mundo seria baseada na pressuposição da imobilidade das “estrelas fixas”. Mesmo isto não sendo uma realidade objetiva, a consideração de espaço e tempo não é afetada, pois eles não são dados, mas apenas pensados. Por isso a consideração de espaço e tempo relativos não significa que esses conceitos são tomados no sentido que o positivismo dogmático lhes confere (SF: 185).

Leibniz admite que é atribuído ao conceito de corpo mais do que a extensão, mas não significa que essa extensão seja diferente da extensão geométrica. Assim como número é diferente das coisas contadas, a extensão do corpo é diferente da extensão geométrica. “Podemos igualmente dizer que não se devem imaginar duas extensões, uma abstrata, o espaço, outra concreta, o corpo, visto que o concreto só é tal pelo abstrato” (Leibniz, 2004, p. 99).

Na sequência, Leibniz completa sua idéia através do personagem Teófilo. “Com efeito, o tempo e o lugar constituem apenas espécies de ordem e nessas ordens o lugar vacante (que se denomina vazio em relação ao espaço), se houvesse, marcaria a possibilidade somente do que falta com sua relação atual” (Leibniz, 2004, p. 99). Cassirer agora conclui:

“Nós inscrevemos os dados da experiência em nosso esquema construtivo e assim obtemos um quadro da realidade física, mas esse quadro sempre permanece um *plano*, não uma *cópia*, e é assim sempre capaz de mudança, não obstante suas principais características

permanecerem constantes nos conceitos de geometria e cinemática” (SF: 186).

Pareceria arbitrário fundamentar a reflexão sobre a realidade introduzindo construções tais como conceito de sistema inercial. Com esse expediente, apenas seria introduzida uma conveniência para tornar a abordagem dos fatos mais fácil, e não teria nenhuma correspondência à nenhuma realidade empírica, mas essa objeção, segundo o idealismo crítico de Cassirer, não tem fundamento.

A ciência tem como critérios inalienáveis a verdade, a unicidade e a harmonia na construção sistemática da experiência. Quando o objeto cai fora desse campo, a ciência tem que transcender e mostrar a possibilidade de outro tipo de objetividade que não a postulada pelo empirismo. Cassirer diz:

“A caracterização das criações dos conceitos ideais como ‘convenções’ tem de início um significado inteligível, ela envolve um reconhecimento que o pensamento não procede de uma maneira meramente imitativa e receptiva nela, mas desenvolve uma espontaneidade original e característica (*Selbsttätigkeit*)” (SF: 187).

Verifica-se aqui a mesma liberdade que um matemático usa para definir ou criar uma operação em sua ciência. A construção, embora livre, não é arbitrária, pois deve harmonizar-se com o *corpus* dessa ciência, além de ter obviamente, um objetivo determinado. Assim são excluídos elementos subjetivos, individuais e caprichosos, pois há uma lei que progressivamente dirige a criação. Cassirer conclui:

“Essa lei é o critério último da ‘objetividade’, por nos mostra que o mundo sistematizado pela física, mais e mais, exclui todos os acidentes de juízos tais como, os vistos inevitavelmente do ponto de vista do observador individual, e descobre em seu lugar aquela necessidade

que é universalmente o núcleo do conceito do objeto” (SF: 187).

Para uma descrição adequada da realidade, o conceito de energia é tão necessário quanto o conceito de espaço e de tempo. Embora esses dois últimos sejam fundamentais, no que tange a ordem e as formas, há necessidade de um conteúdo que as preencham. Esse conteúdo é a energia, que começou com o conceito de matéria, opondo-se ao conceito de vazio em Demócrito, evoluindo de maneira lógica até sua definição moderna. Aqui se tem a base da realidade que apresenta uma existência, independente, eterna e indestrutível. Por isso o energismo<sup>28</sup> apresenta vantagem sobre o átomo e a matéria da ciência natural antiga.

Enquanto átomo e matéria são reduzidos à abstração do pensamento, o mesmo não ocorre com a energia, pois ela pode marcar sua presença de uma maneira sensorial, sem intermediação de símbolos. Todos os sentidos são de uma maneira ou de outra, afetados diretamente pelas as diversas formas de energia. Cassirer resume: “A ‘coisa’, como um substrato passivo e indiferente, é agora posta de lado, o objeto é o que aparece ser a soma das maneiras reais e possíveis de agir” (SF: 188).

Essa vantagem da energia diante de átomo e matéria deve ser bem entendida. Do ponto de vista lógico, esses conceitos estão sobre o mesmo plano. É tão ingênuo pensar que a energia pode ser vista ou ouvida, quanto pensar que a

---

<sup>28</sup> Doutrina filosófica que faz da energia a fonte e o fim supremo de todas as coisas. Essa doutrina foi sustentada pelo químico alemão Wilhelm Ostwald.

matéria possa ser tocada. Tudo que é dado ao sujeito são qualidades diferentes tais como: calor, frio, doce, amargo, etc., mas sem quantificação alguma.

Para uma percepção ser medida ela deve assumir outra forma de ser que tem pressupostos teóricos de mensuração. A grande vantagem da energia sobre a matéria não está na ausência de pressupostos teóricos, que são essenciais para a quantificação das propriedades, mas sim porque, em sua abordagem, torna-se impossível transformar tais hipóteses em propriedade absoluta das coisas, como acontece no “materialismo dogmático” (SF: 189). Assim, o energismo está salvo da hipostatização de princípios abstratos. Ele remonta não ao conceito de espaço, mas ao conceito de número que é o núcleo de uma lei unificadora da multiplicidade dos sentidos. Cassirer, contudo ressalva:

“Número, entretanto, não pode ser entendido como substância, a menos que retornemos ao misticismo do Pitagorismo, mas ele significa meramente um ponto de vista geral, pelo qual nós fazemos uma multiplicidade dos sentidos, unitária e uniforme na sua concepção” (SF: 189).

Contudo, o primeiro passo para conquistar a objetivação de alguma coisa dada é concebê-la sob o conceito de série matemática. Essa coisa torna-se objeto do conhecimento quando tem um definido lugar numa multiplicidade ordenada e graduada. A inserção de cada uma das qualidades em uma série matemática ainda não garante o estabelecimento dessa coisa de forma objetiva. Não basta expressar suas qualidades em termos de números, pois um objeto significa mais que a soma de suas propriedades. Para sua objetividade é necessário que essas propriedades sejam apresentadas em suas relações recíprocas formando uma unidade. Assim, os campos de diferentes propriedades são membros de um sistema (SF: 190).

Como já se mostrou no segundo capítulo, de uma série podem ser geradas várias outras. Na física, se for possível ligar os membros de uma série a uma escala numérica e estabelecer uma constante que faça a transição de uma série para outras, tem-se a posse de um sistema matemático que é capaz de expressar todos os “lados” de um determinado fenômeno .

Experimentalmente foi constatado que movimento com atrito gera calor. Além disto, constatou-se que é possível estabelecer uma relação bem definida entre a quantidade de movimento e a quantidade de calor. Esse *quantum* comum ao movimento e ao calor, através da correspondência das séries, pode ser estendido a outros fenômenos tais como: eletricidade, atração química, etc. Esse *quantum* estabelece um denominador comum definido como trabalho.

Para comparar a eletricidade com a atração química, por exemplo, não é um processo realizado diretamente, mas sim, através de uma série que representa o trabalho. Assim, a energia pode ser medida.

A energia abordada dessa maneira não é um novo ente físico, não é uma nova “coisa”, mas é um sistema unificado de referência para os diversos campos da física. Os fenômenos físicos tais como: luz, calor, eletricidade e magnetismo aparecem agora como uma correlação objetiva mediante o conceito de energia. O real significado e função do conceito de energia é conseguir uma equação que permite igualar fenômenos diversos em um mesmo processo.

Se a energia fosse concebida como uma coisa particular, equivaleria exatamente ao conceito de substância. É o que conclui Cassirer:

“Concebida como uma coisa particular energia seria algo que, tanto poderia ser movimento e calor, magnetismo e eletricidade e, todavia nenhuma dessas coisas. Em

princípio, ela não significa nada mais que um ponto de vista, a partir do qual todos os fenômenos podem ser medidos e assim serem trazidos a um sistema a despeito de toda sensorial diversidade” (SF: 192).

No âmbito das questões da filosofia da natureza, deve m-se fazer algumas observações gerais sobre a lógica.

O conceito de energia depende da natureza da construção de conceitos que são adotados. Energia pode ser considerada como “substância” ou como uma expressão da “relação causal”.

No primeiro caso, a lógica tradicional e o processo de abstração são utilizados; o que é idêntico ou similar é separado nas percepções. O conteúdo da propriedade assim obtida é a natureza do objeto. O conceito está de a cordo com a representação comum. “Concebida como uma coisa particular energia seria algo que era, ao mesmo tempo, movimento e calor, magnetismo e eletricidade, e , todavia nenhum deles” (SF: 192). Já no segundo caso, quando se estabelece o conceito de energia, percebe-se cada vez mais uma invasão do elemento “formal” na “matéria”.

William J. M. Rankine<sup>29</sup> (1820-1872) propôs o uso do termo energia em termodinâmica, e em mecânica fez a distinção entre energia cinética e potencial, mas, em sua abordagem, ele usa apenas considerações metodológicas. Para ele, a física difere metodologicamente das ciências abstratas, como, por exemplo, a geometria, pois no primeiro caso, é possível apontar uma existência concreta de um objeto o que não acontece no segundo. Assim o verdadeiro conceito científico

---

<sup>29</sup> William John Macguaran Rankine foi engenheiro e físico escocês.

deve apontar uma propriedade comum a uma classe de objetos concretos. Serão expostas aqui duas maneiras desta ocorrência.

“Há, em geral, uma dupla maneira de separar tais propriedades. Podemos, por um puro método ‘abstrativo’ separar de um grupo de coisas dadas ou fenômenos, o grupo de determinações que são comuns a todos os membros da classe, e que pertencem a ela diretamente, em sua sensorial aparência; ou podemos ir além do fenômeno com certas ‘hipóteses’ para explicação do campo dos fatos físicos em questão” (SF: 193).

Na física, outro tipo de formação de conceitos consiste na análise dos conceitos matemáticos. Nesse caso, os dados não devem ser separados na formação das classes, mas sim construir o objeto dentro de um postulado da unidade através de uma lei. Essa oposição entre os dois tipos de formação de conceitos aparece agora pronunciadamente na formulação do princípio de energia.

Dessas duas maneiras de derivação do conceito de energia, somente a primeira atende, segundo Cassirer, à crítica científica e filosófica, pois está livre do perigo de que hipóteses alheias à abordagem dos fatos sejam introduzidas. Por exemplo, dentro dessa abordagem, o calor não é visto como um movimento de moléculas, nem o magnetismo como um fluído. Ambos os fenômenos são abarcados pelo conceito de energia na forma em que eles são oferecidos à nossa percepção. Sob esse aspecto, energia é aquela capacidade de operar mudanças. Essa capacidade é a mais universal determinação que pode ser atribuída aos corpos, sem tais mudanças não existiria nenhum fenômeno.

O lado histórico do desenvolvimento do conceito de energia feito por Rankine não é o objetivo de estudo deste trabalho, mas, o lado lógico do desenvolvimento é de suma importância para a filosofia ; uma vez que, o conceito



de energia é estabelecido para todos os ramos da física com um caráter substancial. É o que afirma Cassirer:

“As leis da energia, nós vemos, devem sua universalidade à circunstância de que a propriedade das coisas, que nós temos chamado de energia, é difundida através do universo físico e de alguma maneira anexada a todo corpo como tal. Nenhuma parte da realidade pode escapar a essas leis porque cada parte é conhecida como real somente por essa distinta propriedade. Essa forma de dedução sempre determina a categoria intelectual geral sobre a qual energia é concebida aqui. Ela, em princípio, está no mesmo plano das coisas perceptíveis. Energia é, como se fosse, a própria concreta substancialidade, um ser indestrutível e eterno” (SF: 194 e 195).

Sempre foi constatado um hiato entre os conceitos científicos e filosóficos. No caso de Rankine, esse hiato apresenta-se mais proeminente em seu método do que na sua física. Segundo esse autor, os objetos da física se distinguem pela capacidade de produzir ou receber efeito, ou seja, tem que haver entre eles uma relação causal. E é isto o que caracteriza suas objetividades.

Os críticos, tanto racionalistas como empíricos, concordam que, em qualquer experiência, não há impressões de causa e efeito. Rankine concorda que essa relação não faz parte das impressões imediatas que se tem dos objetos. Ora, se é assim, o seu processo de “abstração” não consegue definir energia, uma vez que ele a considera uma relação de causa e efeito. Para Cassirer, o real ponto de interesse nessa questão, não se trata de determinar se as energias têm o poder de produzir efeitos, mas, sim o método pelo qual elas são medidas, e para isto, um método puramente abstrativo é insuficiente. Por outro lado, a fundamentação matemática envolve a “construção de séries” que não são fundamentadas sobre uma simples abstração (SF: 195).

A lógica moderna substituiu o tradicional princípio da abstração por outro, cujo procedimento não consiste em isolar das diversas coisas, uma característica comum. Tudo que nele é abstraído é uma relação entre os conceitos. Toma-se, por exemplo, a relação  $R$  e um número qualquer de membros de uma série:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc. Aplicando a relação a os membros da série, têm-se as relações:  $aRb$ ,  $bRc$ , etc. e suas simétricas:  $bRa$ ,  $cRb$ , etc. Essas relações podem também ser expressas quando se tem um novo elemento  $x$  e uma nova relação  $R'$ . Posto isto, tem-se as relações:  $aR'x$ ,  $bR'x$ ,  $cR'x$ , etc. A relação  $R'$  é uma relação assimétrica de muitos por um, ou seja,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc. relacionam-se apenas com  $x$ . Isso acontece quando as séries têm a propriedade da **similaridade**, ou seja, cada membro de uma série  $S$  tem um único correspondente na série  $S'$  e vice-versa; cada membro da série  $S'$  tem um único membro correspondente na série  $S$ . A relação é de um para um em ambos sentidos. Trata-se de uma correspondência biunívoca. Como consequência, se um elemento  $x$  de  $S$  precede um elemento  $y$  também de  $S$ , então na série  $S'$ , o elemento  $x'$  precederá o elemento  $y'$  e assim sucessivamente. Assim, a pluralidade das séries  $S$  e  $S'$  poderão ser ligadas através das relações simétricas e transitivas. O que foi estabelecido com apenas duas séries pode ser estendido a qualquer número delas.

Com base nessa similaridade entre as séries pode-se abstrair um tipo de ordem comum a todas. Eis aí um novo tipo de abstração, não mais das características comuns de diversas coisas, mas de um determinado tipo de série. Com esse tipo de abstração não se corre risco de criar uma nova entidade. “Se nós agora aplicamos esse resultado de uma construção física de conceitos, uma

característica essencial do moderno conceito de energia é claramente revelado” (SF: 196).

Para a aplicação desse novo princípio de abstração, inicialmente serão relacionadas fisicamente séries empíricas. Nota-se então uma equivalência entre os membros de cada série como, por exemplo, a equivalência entre movimento e calor. Isto é verificado de uma maneira geral, depois é descoberta uma lei que quantifica a relação de cada membro de uma série com o seu correspondente na outra. Nesse caso, essa lei estabelece quantitativamente a relação entre movimento e calor. Estabelecida essa relação, é possível aplicá-la a outros campos da física desde que as novas séries sejam simétricas e transitivas. Esse processo desemboca no estabelecimento de uma nova relação: valor –trabalho, ou seja, certa quantidade de energia que é precisamente estabelecida quando comparadas às séries assim relacionadas. Esse novo “ser” não tem nenhuma significação isoladamente. Sua plena significação só se justifica dentro do sistema, ou seja, sua “essência” emana das leis das conexões. Cassirer conclui:

“Se seguirmos a doutrina tradicional da abstração, então somos quase necessariamente forçados a uma interpretação substancialista da energia, como mostra o exemplo de Rankine; enquanto a teoria funcional de conceitos encontra o seu correlato natural na determinação funcional da suprema realidade física. Em um caso, a consideração finaliza na suposição de uma propriedade comum a todos os corpos, e no outro, a criação do mais alto *padrão de medida* comum para todas as mudanças em geral” (SF: 197).

No processo que se vem comentando, a força é transformada em movimento e esse, por sua vez, em calor. Há por isso uma relação entre grupos

de fenômenos diferentes, e o mais interessante é a possibilidade dessa relação ser quantificada.

A questão de saber o quanto de um fenômeno equivale ao outro é obtida através da lei que rege a transformação. Se um cientista pode apontar essa lei de equivalência, mesmo que os fenômenos tenham as mais diferentes propriedades, ele estaria atingindo a “essência” desses fenômenos. Cassirer concorda com Mayer para o qual energia é então um puro sistema de relações e não pode transformar em uma entidade absoluta (SF: 197).

Em a natureza, mudanças são constantemente verificadas, porém, as fórmulas matemáticas é que estabelecem as relações entre essas mudanças e, conseqüentemente, todo o verdadeiro conhecimento da natureza. Cassirer conclui: “Assim, com o avanço do conhecimento, a energia e o átomo são, cada vez, mais despojados de significado sensorial. Esse desenvolvimento aparece mais claramente no conceito de energia potencial, que mesmo em seu nome geral, aponta um peculiar problema lógico” (SF: 198).

O fato de que energia potencial seja transformada em cinética, não implica em sua substancialidade, trata-se apenas de um fenômeno com duas polaridades. Se uma fase é positiva, a outra é negativa. Esse fato confirma o conceito relacional da energia, pois, uma substância negativa é um *contradictio in terminis*. Há uma evidente vantagem da energética sobre a mecânica, pois permite igualar quantitativamente fenômenos de campos diferentes.

A abordagem quantitativa de dois campos de fenômenos diferentes exige a introdução de um elemento intelectual mediante uma regra numérica. Deste modo, Cassirer conclui: “Energia é capaz de instituir uma ordem entre a totalidade dos

fenômenos, porque ela em si não está no plano dos mesmos; porque carecendo de toda concreta existência, energia somente expressa uma pura relação de mútua dependência” (SF: 200).

Assim, a conclusão evidente é que, para ordenar fenômenos naturais, só se pode fazê-lo por algo que transcenda o plano dos mesmos. Do ponto de vista epistemológico, o energismo estaria com uma tendência de voltar à análise aristotélica do mundo. É um erro ver nele um retorno às “qualidades” físicas como foram estabelecidas por Aristóteles. O que deve ser levado em conta, é que as qualidades atribuídas por Aristóteles aos corpos é algo completamente diferente das qualidades que a física moderna atribui aos mesmos. Em Aristóteles, essas qualidades eram apenas hipóstases das qualidades sensoriais, já na física, essas qualidades são estabelecidas através de um sistema conceitual da matemática que é revestido de uma forma lógica.

Pode-se considerar calor como uma indefinida sensação de mais ou menos quente, mas o que estabelece sua objetividade é a quantidade de graus da temperatura. Assim, o que é abandonado é a propriedade sensorial subjetiva e o que vale é a peculiaridade de sua forma serial matemática. Cassirer conclui : “No esquema da física teórica, um definido sistema sob investigação é recolocado por um sistema numérico de valores que expressam seus vários elementos quantitativos” (SF: 201).

É importante salientar que a opção pela quantidade não exclui a qualidade. Em verdade, só há uma física qualitativa na medida em que há um tratamento matemático da qualidade. O desenvolvimento da matemática, que, segundo Leibniz, atingiu seu ápice na geometria projetiva e na teoria de grupos, oferece ,

segundo Cassirer, um campo frutífero para a abordagem de uma física qualitativa, sem ter que se rejeitar valores numéricos. Isso pode ser feito independentemente de qualquer interpretação mecânica do fenômeno.

Com a equivalência numérica entre fenômenos, tais como movimento e calor, não significa e nem pressupõe ter descoberto a unidade da “essência” deles. O que ocorre realmente é que a física matemática começa por estabelecer um exato valor numérico que é a base da homogeneidade do processo e que não pode ser sensorialmente reduzido um ao outro (SF: 203).

### **3.3 Construção dos conceitos na Química**

A análise de Cassirer sobre o processo de construção dos conceitos na ciência natural exata estaria incompleta se ele não levasse em conta as etapas construtivas da química, uma vez que, essa ciência começa com observações empíricas e prossegue até estabelecer seus conceitos (SF : 203). Suas leis, como por exemplo, as leis das massas e das fases pertencem ao mesmo tipo matemático das proposições da física. No entanto, algumas diferenças devem ser traçadas. Cassirer parte do ideal da física de Galileu e Newton até chegar à química moderna (SF: 204). A física hoje visa estabelecer leis puras de relação entre conceitos que já foram propostos, na mecânica e dinâmica. Já a química, no primeiro plano, investe na abordagem das coisas individuais. Os conceitos dessas coisas, como estabelecidos pela física e a matemática não são adequados para a solução dos problemas da química. Tanto em matemática como em física, o conceito é apenas um símbolo de uma forma de conexão onde o conteúdo material é perdido.

Segundo Cassirer não há necessidade de um princípio diferente daquele que rege física para a formação do conhecimento na química.

Antes de Lavoisier, imperava na química a doutrina do flogisto, que era um elemento genérico pertencente a todos os membros de um grupo. Esse elemento determinava as propriedades perceptíveis desse grupo. A rigor, havia apenas uma hipostatização das qualidades sensoriais dos corpos. Alguns exemplos esclarecem melhor a teoria. O enxofre, presente no corpo, garante sua combustibilidade, o sal, a solubilidade, o mercúrio, as propriedades dos metais, e assim por diante.

Para a divisão dos corpos mediante suas propriedades genéricas os químicos defrontaram com uma nova tarefa, a saber, eles se viram diante da necessidade de determinar a exata proporção dos elementos e suas relações mútuas dentro de um corpo. Essa questão da determinação quantitativa é um avanço importante dentro da química. Cassirer afirma: “A lei das proporções definidas, pela qual elementos diferentes são conectados uns com os outros, é o ponto de partida da moderna teoria química” (SF: 205).

Essa lei foi estabelecida independente da constituição da matéria em geral e da hipótese atômica em particular. Ela inicialmente foi estabelecida por Jeremias B. Richter<sup>30</sup> (1762-1807). Considerando uma série de ácidos, Richter atribui a cada um deles um número. O mesmo ele fez com uma série de bases. A maneira com que cada ácido é combinado com a base correspondente é determinada por uma relação entre o número atribuído ao ácido e à base respectivamente. Richter

procurou provar, em detalhes, que a série dos pesos das bases forma uma progressão aritmética e, a série dos pesos dos ácidos, uma progressão geométrica. É nessa relação que está o fundamento da lei. Além disto, ele viu uma analogia entre essas séries e a distância dos planetas ao sol em nosso sistema solar. Cassirer atribui essa descoberta ao princípio da “harmonia” pitagórica:

“Essa concepção [Distância dos planetas ao sol] não foi provada de maneira satisfatória empiricamente, mas, ela é, não obstante, característica e significativa em sua tendência geral. Ela é, como vemos, a doutrina geral Pitagórica da ‘harmonia’ do cosmo que aqui está presente no berço da química moderna, como também está presente no berço da física moderna. Nesta conexão, Richter pode ser comparado a Kepler, que é, se não considerarmos toda a sua realização, mas meramente sua tendência intelectual, pois, com Kepler, ele compartilha da concepção do perfeito fluir do arranjo numérico do universo, que é verificado em todos os campos particulares dos fenômenos” (SF: 206).

Na química, um novo passo de suma importância foi dado por Dalton, e teve início com lei das proporções definidas (Lei de Proust). Essa lei estabelece que, independentemente do modo com o qual é preparado um composto ou de sua fonte de obtenção, os elementos constituintes da substância combinam sempre na mesma proporção de massa. Como exemplo dessa lei tem-se que um grama de hidrogênio combinado com oito gramas de oxigênio produz nove gramas de água. Logo, dez gramas de hidrogênio que são combinadas com oitenta gramas de oxigênio produzirão noventa gramas de água.

Assim Dalton passou aplicar a lei de Proust aos átomos, que passam a formar seus compostos não mais baseados em seus tamanhos ou formas, mas

---

<sup>30</sup> Jeremias Benjamin Richter foi um químico alemão que mostrou a existência de relações fixas entre as massas dos elementos constituintes dos sais e determinou as massas equivalentes dos diversos sais e bases. (Lei de Richter).



sim, em suas massas. Com isto, foi criado um grande problema para química da época. Qual seria a fórmula adequada de um composto? A questão foi resolvida com o peso atômico dos elementos, tomando como unidade de medida o peso atômico do hidrogênio. Cassirer afirma:

“Aqui, de início, é somente afirmado que há um número característico equivalente para cada elemento e que, quando dois ou mais elementos entram em combinação suas massas são ligadas com todos os múltiplos desses números. Mas esta regra de ‘proporção múltipla’ é combinada por Dalton com uma certa interpretação e só desta maneira é que entra no sistema das doutrinas químicas. O conceito de combinação de peso é transformado no de peso atômico” (SF: 206).

Cabe aqui ressaltar o aspecto relacional dos elementos, não havendo lugar para valores absolutos dos mesmos. O peso atômico do oxigênio tanto poderia ser oito como qualquer um de seus múltiplos: 16, 32, ... , etc. Em cada caso, nas fórmulas, os átomos de oxigênio seriam dobrados, quadruplicados, etc.

No desenvolvimento da investigação sobre átomos, abstraídos os detalhes, evidencia-se um problema epistêmico geral. Inicialmente, nota-se que o pressuposto dos diversos tipos de átomos tem por finalidade descobrir as propriedades da matéria. A riqueza explicativa dos fenômenos é medida em função de uma maior precisão na descrição de suas propriedades, e isto é revelado pela “interioridade” substancial do átomo, que passa a ser considerado como um ponto fixo e “tangível” em uma visão geral.

Através de seus números e combinações os átomos geram um quadro estrutural na química. Mas, Cassirer pondera: “Torna-se claro que o átomo nunca é dado como ponto de partida, mas sempre só é dado como meta das nossas afirmações científicas. A riqueza do conteúdo que ele ganha no progresso da

investigação científica nunca lhe pertence fundamentalmente, mas é ligada à outra espécie de ‘sujeito’ empírico” (SF: 208).

Sem qualquer consideração pela existência metafísica, os átomos podem ser considerados como o centro de referência comum a toda multiplicidade dos fenômenos. As propriedades das coisas particulares são aparentemente ligadas aos átomos para que o sistema de relação seja perfeito. Sobre tal fenômeno, Cassirer diz:

“Na verdade, não estamos interessados na relação das diversas séries do átomo, mas antes com a *relação recíproca* entre elas através da mediação do conceito de átomo. Aqui aparece o mesmo processo intelectual que nós previamente encontramos. As complicadas relações entre certos sistemas não são expressas por nossa comparação entre cada sistema individualmente com todos os outros, mas por colocá-los todos em relação a um único e idêntico termo” (SF: 208).

Já se referiu anteriormente a essa ordem comum das séries que detém um mesmo tipo de propriedade, são elas as séries similares. A investigação do peso atômico não se detém nela mesma, mas possibilita descobrir critérios para o tratamento dos fenômenos físico-químicos. À medida que essas determinações avançam, o ciclo das relações empíricas avança também. Se a determinação do peso atômico fosse final e absoluta eliminaria a oportunidade de avançar em novas descobertas. O caráter relacional desse valor fundamental possibilita novos avanços do conhecimento. Pois no conceito de átomo estão pressupostas todas propriedades empíricas da matéria, assim ele força o pensamento a descobrir propriedades ainda desconhecidas. O pensamento avança assim, do conhecido para o desconhecido.

“Estas multiplicidades já descobertas e definidas de acordo com a lei, funcionam como uma fixa unidade lógica

em oposição a outras multiplicidades a serem descobertas; e é esta unidade, do ponto de vista da fundamental conexão, que torna possível nossa suposição de um último e idêntico sujeito para a totalidade das possíveis propriedades” (SF: 209).

Aqui está claramente evidente que o conhecimento empírico da química não pode evitar o conceito de substância. No entanto, o progresso filosófico do conhecimento deve fixar esse conceito em novas bases. Ele perde sua fixação adquirindo gradativamente uma dimensão relacional.

Dentro de uma abordagem ingênua, o átomo pode ser visto como o núcleo substancial do qual é possível distinguir e separar as propriedades. No entanto, se se toma um ponto de vista crítico em relação ao desenvolvimento das idéias científicas vê-se que “estas ‘propriedades’ e suas relações formam o real dado empírico para o qual o conceito de átomo é criado. Assim o átomo da química é uma ‘Idéia’ no estrito significado que Kant deu a este termo” (SF: 210).

O átomo é apenas um ideal regulador e essa sua função permanece sempre, mesmo que haja mudança de conteúdo. Cassirer conclui:

“Assim, por exemplo, o átomo da matéria tornou-se átomo da eletricidade, o elétron. Precisamente, esta espécie de mudança mostra que, o que é essencial no conceito, não consiste em alguma propriedade material, mas é em um conceito formal, que pode ser preenchido por um conteúdo múltiplo de acordo com o estado da nossa experiência” (SF: 211).

Após a concepção de átomo e peso atômico atribuído a todos elementos, a construção dos conceitos químicos lança mão de outro valor numérico que é denominado valência. Como nos outros casos analisados, o átomo de hidrogênio é tomado como padrão de unidade, sendo assim atribuídos valores comparados

aos outros elementos: o átomo de cloro também será um, o oxigênio será dois, o nitrogênio três e o carbono quatro. Isto significa que o carbono é tetra valente, ou seja, num composto que entra carbono e hidrogênio, cada átomo de carbono exige quatro de hidrogênio na combinação. Assim, há mais uma característica constante para cada elemento.

“A ‘valência’ dos elementos é a expressão de uma definida propriedade neles, que lhes pertence independente de sua afinidade química” (SF: 211). Segundo esse novo princípio, os elementos químicos podem ser agrupados em tipos de acordo com suas valências. Logo, os elementos podem ser distribuídos em diversos tipos e, por uma progressiva substituição, eles podem ser obtidos uns pelos outros, através das regras de valência (SF: 212).

Na química, mesmo não sendo tão importante, a teoria dos tipos exhibe as mesmas características da análise da formação dos conceitos científicos, pois ela se apresenta com paradigma de relações lógicas. Sua base é conceito de série e não conceito genérico. Assim Cassirer afirma:

“As diferentes combinações pertencentes a um tipo não são assim concebidas por causa da externa similaridade de suas propriedades sensoriais, ou por causa de sua direta concordância em suas funções químicas. Elas estão juntas, na medida que podem ser mudadas umas nas outras, por meio de relações que subsistem entre a valência de átomos individuais, ao passo que, os remotos membros das séries não necessitam uma adicional analogia, do que aquela que é estabelecida pela própria lei da derivação” (SF: 212).

Conceito, em química, difere do conceito em matemática, porque esse último procede de uma maneira construtiva, enquanto o primeiro vem da relação de equivalência entre elementos onde é descoberta uma relação empírica entre

eles. Ignorando esta diferença de origem, a construção de conceitos em ambas teorias segue a mesma direção.

“Aqui, uma vez que o princípio geral da coordenação tenha sido definido, nosso interesse está em levar este princípio através de toda a multiplicidade dos materiais dados pela observação e assim transformando o último agregado em um sistema com o qual nós aprendemos a ação recíproca e a independência dos membros particulares de acordo com regras fixas” (SF: 213).

A teoria dos tipos permite deduzir propriedades de um elemento a partir das propriedades dos outros possibilitando agrupar a multiplicidade dos corpos em poucos princípios gerais. A heterogeneidade transforma-se em homogeneidade quando são estabelecidas certas relações numéricas. “É o aspecto numérico e relacional que é de novo decisivo, pois constitui genuinamente a propriedade característica da interpretação científica do conceito químico” (SF: 214).

A valência, diante do exposto, seria uma “*qualitas occulta*”. Não é sabido porque um átomo de hidrogênio combina com um de cloro, dois de oxigênio e quatro de carbono, por exemplo. O conceito de valência não resolve esta questão, pois não penetra na natureza “interior” da conexão de um átomo com outro.

“A constituição da fórmula química, de início, parece oferecer um direto e intuitivo quadro de uma ordem serial e posição dos átomos entre si; mas o que é finalmente obtido não é o conhecimento do último e absoluto elemento da realidade, antes, uma geral análise dos corpos e matérias da experiência” (SF: 214).

As fórmulas dos compostos não oferecem apenas a relação dos elementos que as compõem. Elas também exibem a inserção desses elementos em vários tipos de séries, e assim, aponta para a totalidade da estrutura em que esses

elementos estão inseridos. Isso é um indicativo para outras combinações que podem ser obtidas a partir dessa maneira.

A questão de como os elementos constituem um composto é abandonada, em favor de descobrir uma regra geral de relações mensuráveis que contemple, do início ao fim, a transformação química. Conclui Cassirer fazendo referência a Ostwald: “Tão logo esta fase é atingida a química toma seu lugar no plano geral dos energéticos e assim passa de um círculo de ciência descritiva empírica para o da ciência matemática” (SF: 216).

Torna-se assim evidente o papel da química no plano geral de desenvolvimento dos conceitos científicos. Ao acompanhar o seu desenvolvimento histórico é possível constatar as etapas, através das quais, chega m-se aos conceitos científicos que devem dar conta da multiplicidade dos corpos. Os diversos materiais que formam os corpos passam a ser considerado através do peso atômico de seus elementos. Esse número traz para o conceito toda a riqueza das propriedades empíricas desses corpos.

A redução da multiplicidade fenomênica a determinações numéricas tem uma grande vantagem metodológica; porém, como o número é desenvolvido a partir de uma estrutura inicial de acordo com leis, torna -se necessário a aplicação destas determinações tanto na física quanto na química. Se, por um lado esse expediente facilita as coisas, por outro, levanta um problema. Esses valores numéricos devem ser representados em sequências de transformações através de uma lei precisa. Se os elementos estão representados por números segundo uma lei, podem ser reunidos em um sistema periódico. Assim, suas propriedades aparecem ordenadas nesse sistema. Cassirer afirma:

“As várias propriedades dos corpos simples, suas durezas e maleabilidades, fusibilidades e volatilidades, suas condutibilidades térmicas e eletricidade, etc., agora aparecem como funções periódicas de seus pesos atômicos (...). O lugar de um elemento nessas séries fundamentais e necessárias determina em detalhe sua ‘natureza’ físico-químico” (SF: 216).

Em princípio, o que ocorre é que a “matéria” está sendo agora tratada com uma variável e não mais como constante, como sempre o foi. As qualidades da matéria podem ser concebidas quando podem ser arranjadas em séries através de uma lei definida de progressão.

Pode-se compreender mais claramente o processo de dedução dos conceitos na química, quando se compara a abordagem metafísica com a físico-matemática da natureza. Em sua análise sobre o conhecimento Locke estabeleceu a conhecida distinção entre as propriedades primárias e secundárias. Essas últimas, dadas através dos sentidos, seriam subjetivas e só as primárias seriam inerentes ao corpo e, portanto, objetivas. Para Locke, todas as propriedades só dariam um conhecimento realmente universal se fosse possível estabelecer uma conexão de necessidade entre essas propriedades. Em contraposição a essa posição de Locke, Cassirer pondera: “Não importa quantas propriedades de uma substância podemos descobrir pela observação e investigação, [sem] a questão de suas conexões interiores não avançamos um passo” (SF: 218).

De uma propriedade do ouro, outras não podem ser deduzidas. Locke percebendo esta impossibilidade postula uma “substância essencial” da qual poderiam ser derivadas todas as propriedades do corpo. A conexão dessas propriedades permite a descoberta de outras partindo de uma que é tida como

certa. Sem essa conexão importantíssima as propriedades seriam apenas um agregado de descobertas inúteis.

*“Como, de uma assumida propriedade fundamental seguem-se outras, de um definido peso atômico resulta uma definição de maleabilidade e dureza, fusibilidades e volatibilidade, permanece, em verdade, sem resposta. Não obstante, o fato dessa dependência ser usada na tentativa de calcular e prever certas propriedades especiais sobre a base de certos dados especiais. A conexão funcional assim estabelecida contém, em verdade, menos do que a percepção metafísica das essências últimas, mas, ao mesmo tempo, ela oferece mais do que uma conexão empírica de particulares desconectados” (SF: 218 e 219).*

É patente que isto não possibilita atingir a “interioridade” das coisas, mas permite descobrir regras que medem a conexão entre os corpos.

Mas o problema, que agora se deve enfocar é a passagem dos valores discretos usados na química para os valores contínuos, como eram aplicados nos fenômenos físicos. Com a resolução desse problema é possível construir os conceitos científicos de uma maneira abrangente. Assim, ao invés de um aparecimento simultâneo de propriedades isoladas, aparece uma lei matemática unificada que representa a dependência entre as variações das grandezas, ou seja, uma função. O peso atômico e, por conseguinte, as características dos elementos que não poderiam passar, sem o salto, de um para o outro, não seria mais representados por constantes como em química. Sob esse aspecto, o conceito químico se igualaria ao físico. Cassirer ressalta essa tendência na Química:

*“A última fase da ciência natural que tem resultado da consideração de fenômenos da radioatividade parece testificar tal mudança diretamente; por aqui, a ciência assume uma contínua transformação de uns elementos em outros e, para ela, o material sensorial com sua definição pelos sentidos é somente um ponto de transição na dinâmica do processo” (SF: 219).*



Em síntese, a pesquisa química parte de uma pluralidade observada que não apresenta uma conexão. Essa multiplicidade é fixada por determinações de números e medidas que estão ligados em séries, e que, por sua vez, são determinadas por leis pelas quais os últimos membros podem ser determinados pelos primeiros. Daí surge um novo problema, que consiste em reduzir as leis das estruturas de relações a uma mais profunda lei causal do processo de fundamentação de uma e de outra. Nesse avanço do processo empírico, a peculiaridade do processo lógico fica evidenciada, e o conceito, na medida que respeita os fatos, ganha o domínio sobre eles (SF: 220).

### **3.4 Ciência natural e “realidade”**

Do exposto torna-se evidente que, como na formação de conceitos da química, a relação entre o particular e o universal é colocada sob nova luz. Na física teórica, a meta é a lei geral do fenômeno, os casos particulares servem de constatação da lei universal. Já na química, a realidade é apresentada em coisas ou eventos particulares, enquanto que a concepção mesma dos conceitos relativos a essas coisas ou eventos cai fora desta esfera. Assim se evidencia aquela antinomia que, segundo Cassirer, emana do sistema aristotélico. Ele afirma: “Todo conhecimento procura ser conhecimento universal e somente se realiza nesta meta, ao passo que o ser verdadeiro e original não pertence ao universal, mas às substâncias individuais na dinâmica sucessão de suas relações” (SF: 220).

Esse antagonismo entre o conceito abstrato e o real concreto, latente na teoria do conhecimento e na metafísica de Aristóteles reaparece em forma de conflito como um dos aspectos da disputa medieval entre “nominalismo” e “realismo”.

Contemporaneamente, segundo Cassirer, foi Heinrich Rickert<sup>31</sup>(1863-1936) que, em sua teoria da construção de conceitos, mostrou de maneira bem precisa esta oposição ao denunciar a relação de exclusão mútua entre a direção do pensamento sobre o conceito e sua direção sobre o real. À medida que o conceito cumpre sua tarefa, o campo dos fatos perceptuais desaparece. Há cada vez mais um empobrecimento do significado da realidade.

Para Rickert, a ciência, com seus conceitos, cria e aumenta o fosso entre o pensamento e o fato, porque nada de individual, que é intuitivo, entra no conteúdo do conceito científico. Cassirer, no entanto se coloca contra essa posição. Em primeiro lugar, ele argumenta que todo o investigador empírico acreditou e acredita que sua principal tarefa é mais e mais se acercar do concreto. A pergunta que se segue é, como pode essa exigência de retratar cada vez mais o concreto ser satisfeita, se os conceitos parecem afastar dele? No processo abstrativo da lógica tradicional os elementos não comuns ficam eliminados e, por conseguinte, não têm condições de representar o particular em seu aspecto concreto. Isso a princípio parece favorecer a posição de Rickert. Além do mais, a formação de um conceito ficaria atrelada ao significado de uma **palavra** e dependente da oscilação desse significado. Sobre isso afirma Cassirer:

“Por exemplo, não há inteiramente definida uma intuição no conteúdo correspondente à palavra ‘pássaro’, mas, há somente um vago esboço da forma junto a uma vaga representação do movimento de asas, de modo que uma criança pode chamar de um besouro voando ou uma borboleta, o mesmo é originalmente verdadeiro para toda nossa representação universal” (SF: 222).

O conceito científico surge originalmente debaixo das mesmas condições de abstração, mas é diferente em função do procedimento adotado em sua formação. A abstração, não atinge o universal, eliminando as características do particular, antes pelo contrário, estas características são inseridas após as devidas transformações como se explicitou no capítulo primeiro. Assim: “Os conceitos científicos exatos somente continuam o processo intelectual já efetivo no conhecimento da matemática pura.” (SF: 223).

Os elementos que na abstração tradicional são descartados, no novo processo, são registrados numa série que é estabelecida através de uma lei. Cada número, ou seja, cada lugar na série representa um elemento que, no processo tradicional, é descartado.

“Para o ‘conceito’, neste sentido, a antinomia sobre a qual Rickert fundamenta seu argumento não aparece. Aqui nenhuma brecha surge entre o ‘universal’ e o ‘particular’, pois o universal em si não tem outro significado e propósito do que representar e tornar possível a *conexão e ordem do particular em si*. Se considerado o particular como um *membro da série* e o universal como o *princípio da série*, é imediatamente claro que, os dois momentos não sobreporão um ao outro e de nenhuma maneira serão confundidos, ainda que refiram a todo tempo um ao outro em suas funções” (SF: 224).

---

<sup>31</sup> Rickert foi um representante da escola neokantiana de Baden. Seu interesse principal foi a fundamentação epistemológica das ciências com base num exame filosófico crítico de sua estrutura e de suas relações mútuas.

Sem brecha entre o universal e o particular não haverá uma universalidade vazia no sentido comum da palavra. Cassirer assim conclui: “O individual em sua peculiaridade é somente ameaçado por uma universalidade e uma imagem genérica obscurecida, enquanto que a universalidade de uma definida lei de relação confirma essa peculiaridade e a faz conhecida em todos os lados” (SF: 225).

Em realidade as coisas “individuais” não passam por cima das “universais”, mas, as determinações do agregado empírico são unidas em uma válida conexão, e esse processo privilegia o conceito-relação sobre o conceito-coisa. A passagem para a universalidade não diz respeito à formação de conceitos que é, em fim, uma síntese onde a necessidade se impõe. A verdade é que, entre os conceitos científicos e a realidade há uma separação. Nada de fundamental do conceito pode ser apresentado como uma parte da percepção sensorial. Não existe entre eles uma exata correspondência: “Quanto mais o pensamento científico estende seu domínio, mais ele é forçado para concepções intelectuais que não possuem nenhuma analogia no campo das sensações concretas” (SF: 227 e 228).

Não se deve pensar que se trata apenas de conceitos altamente hipotéticos tais como, éter e átomo. Conceitos tais como matéria e movimento, que aparecem na investigação científica como dado, não passam de uma mescla do “real” com o “não-real”. Esse direcionamento não significa que a ciência está afastando-se cada vez mais de sua tarefa de oferecer uma construção concreta da existência empírica. Esse afastamento é necessário para que ela volte sobre a realidade melhor equipada para abordá-la de uma nova maneira. Essa volta torna possível uma experiência que é agora mais rica que a primeira. O conceito assim

construído não é uma cópia das coisas individuais. Além do mais, o processo de ida e volta evita o perigo de transformar a relação entre as coisas e seus conceitos em uma oposição metafísica.

Na construção de conceito dentro de uma forma matemática há uma exigência de ligação das propriedades da coisa conceituada. Um bom exemplo citado por Cassirer é o conceito de energia. Esse conceito não retrata uma coisa homogênea em que as diferenças particulares ou os diversos tipos de energia foram descartados, e sim, um princípio unitário de liame que só pode ser verificado em qualitativa diferença. Ele afirma: “Não há assim contradição entre unidade universal de princípios e a existência das coisas particulares, porque não há no fundo, rivalidade entre as duas. Elas pertencem a dimensões lógicas diferentes, assim nenhuma pode diretamente tomar o lugar da outra” (SF: 229).

A relação entre a validade do universal e a existência particular das coisas é mais claramente definida no campo da matemática. Somente quando constantes numéricas são inseridas nas fórmulas das leis gerais é que a multiplicidade da experiência pode tornar-se “natureza”. Só assim é que a construção científica da realidade está completa. O princípio da conservação da energia só tem utilidade no domínio da natureza quando há uma equivalência entre os diversos tipos de energia. E assim com essa equivalência definida numericamente pode-se imigrar para os diversos campos da ciência através do conceito de energia. Essas constantes rompem com o esquema da lógica tradicional do conceito genérico, pois sob constantes diferentes há pluralidade de tipos. Cassirer exemplifica:

“O ‘dois’ ou o ‘quatro’ não existe como um gênero que é realizado em todos os dois ou quatro objetos concretos, mas é um membro fixado na série de unidades e ocorre

uma única vez e não padece dúvida de sua carência de qualquer atributo sensorial, pois ele é apenas um 'ser puramente conceitual' (SF: 230 e 231).

Fundamentado em constantes numéricas o conceito científico satisfaz os dois lados. Ao contemplar o lado do particular, não o faz de uma maneira isolada, pois o individual é registrado em uma série de multiplicidade ordenada através de uma lei. "A universalidade da regra funcional é somente representada em constantes numéricas particulares e as particularidades dessas constantes são somente representadas na universalidade de uma lei que mutuamente as conecta" (SF: 231).

Toda ciência natural deve partir de fatos particulares bem definidos e isto, não pode prescindir da idéia de lei. Não há uma separação rígida entre o conceito científico genérico e o conceito particular de uma coisa, ambos os conceitos interpenetram um ao outro. Isto é o que pode ser constatado no desenvolvimento histórico da ciência. A divisão entre o universal e o particular não corresponde a uma divisão efetiva na ciência. "Se nos coletamos sob o conceito genérico todos os procedimentos científicos 'históricos' que são direcionados para ganhar os 'fatos' puros, mesmo assim de nenhuma maneira é mostrado que o conceito produzido representa a verdadeira unidade metodológica" (SF: 232).

É impossível, portanto dividir o nosso conhecimento em universal de um lado e puramente particular do outro. "Somente a relação entre os dois momentos, somente a função preenchida pelo universal em conexão com o particular, fornece o verdadeiro fundamento da divisão" (SF: 232).

A posição aristotélica de que só há ciência no universal e nunca no particular não fica completamente anulada com a posição de Cassirer. A ciência continua no universal, mas esse, agora, é entendido com um princípio que une os particulares nele inseridos através de séries matemáticas. Cassirer admite que esse método científico de conceitos relacionais nunca vai atingir o âmago do particular, mas “o individual, como ponto infinitamente distante, determina a direção do nosso conhecimento” (SF: 232).

Assim, o conflito entre o universal e o particular é solucionado em condições de complementaridade e fornece a condição de estabelecer o que é “realidade”.

## Conclusão

Das várias concepções teóricas sobre a formação de conceitos, duas se impuseram ao longo da história da filosofia. Delas, a mais antiga é a que postula a adequação do intelecto à coisa. A mais recente que encontra em Ernst Cassirer (1874-1945) um de seus maiores defensores é uma concepção “funcional”. As duas tentam resolver o problema do conhecimento atuando em sentidos opostos. Na primeira, a mente se dirige ao objeto como algo dado, pronto e acabado. Já na segunda, o objeto não é dado, ele é construído (EPC: 94 Vol. IV). Evidentemente, essa última posição é de inspiração kantiana e é o ponto de partida do neokantismo de Cassirer.

A filosofia anterior a Kant estava comprometida com uma teoria do conhecimento que postulava um acordo entre a realidade e o pensamento, mas a filosofia crítica de Kant rompe com essa posição. O objeto do conhecimento humano não é dado, mas sim construído, por isso não há nenhuma necessidade de conexão do conhecimento com a realidade como tal. Mas, ele não é construído aleatoriamente, pois requer elementos apriorísticos que são invariantes no que tange ao número e ao espaço.

Conforme tentou-se mostrar no primeiro capítulo, o objeto do conhecimento não é algo dado, do qual, a mente extrai propriedades. Ao contrário, na construção do conhecimento, o caminho não é do objeto para mente, e sim, dessa para o objeto, construindo-o em uma sequência ascendente.

Cassirer afirma: “A determinação da individualidade dos elementos não é o início, mas o fim do desenvolvimento conceitual, ele é o alvo lógico que nos



aproxima por uma progressiva conexão das relações universais” (SF: 94). Se por um lado, a trajetória do conceito de função tornou-se um modelo de tratamento matemático das leis da ciência natural exata; por outro lado a trajetória do conceito de substância na história da filosofia aponta para seu próprio esvaziamento.

Para Russell, substância é apenas “o sujeito permanente de predicados variáveis”. Segundo ele, esse conceito foi introduzido na filosofia apenas para fazer jus aos argumentos de Parmênides sobre o **ser**, sem negar a evidência dos fatos cotidianos (Russell, 1969, Vol. I p. 61). Russell afirma: “A concepção de ‘substância’, como a de ‘essência’ é uma transferência para a metafísica do que é apenas uma conveniência linguística” (Russell, 1969, Vol. I p. 233). Segundo esse filósofo, “substância” é simplesmente um modo conveniente de reunir acontecimentos em feixes. O termo é um nome coletivo para muitas ocorrências. Garante Russell que, se usado o termo além desse significado, denotará algo incognoscível. E mais, afirma também: “‘Substância’, numa palavra, é um erro metafísico, devido a transferência para a estrutura do mundo da estrutura de sentenças compostas de um sujeito e um predicado” (Russell, 1969, Vol. I p. 235).

Para Descartes existem duas espécies de substâncias distintas, a extensão e o pensamento, já para Baruch Espinosa (1632-1677), só pode existir uma. Esse último define: “Por substância entendo o que existe em si e por si é concebido, isto é, aquilo cujo conceito não carece do conceito de outra coisa do qual deva ser formado” (Espinosa, 1997, p. 150).

Como se vê, o conceito de substância, através dos séculos, sempre apresentou variações conforme o filósofo que o definia, mas, nele, o atributo de

**necessidade** sempre esteve presente. Em Espinosa, esse atributo é identificado com as leis da natureza.

Cassirer salienta uma questão que já preocupava Kant em seus escritos pré-críticos. Trata-se da questão da causalidade; como entender que, pelo fato de algo ser, algo mais também deve simultânea e necessariamente ser. Cassirer diz:

“Se, de acordo com a metafísica dogmática, tomamos o conceito de existência absoluta como ponto de partida, esta questão, em última análise, deve-se se afigurar insolúvel. Porque um ser absoluto exige também elementos últimos absolutos, cada um dos quais constitui em si mesmo uma substância estática e deve ser compreendido por si mesmo. Este conceito da substância não apresenta nenhuma passagem necessária, ou ao menos compreensível para a multiplicidade do mundo, para a diversidade dos seus fenômenos particulares. Também em Spinoza a transição da substância – concebida como aquilo que *in se est et per se concipitur* – para a sequência dos diversos *modi*, dependentes e mutáveis, não é algo deduzido e sim conquistado por artimanhas” (AFFS: 49 Vol. I).

Eis a questão: Como contemplar todas as multiplicidades variáveis, partindo do atributo de necessidade de um único princípio? Aqui volta-se para a matemática. O raciocínio baseado na indução matemática estabelece o conjunto dos números naturais de uma maneira completamente *a priori* e essa forma de raciocinar está desvinculada da lógica aristotélica. Isto significa que não há apelo a algo empírico e conseqüentemente não tem sentido falar da substancialidade dos números. Como ficou explicitado o conceito de número, em Russell, foi fundamentado na similaridade das classes. Já a Frege, coube -lhe o mérito de entender que a derivação de número só pode ser resolvida dentro das sentenças onde ele ocorre. Aqui ele rompe com o esquema “S é p” da lógica escolástica e o número passa a ser entendido como o “recheio” de uma função. Dedekind com

sua teoria do corte, além de fundamentar o número irracional, mostra que a essência do número é sua posição. Assim, o número perde qualquer vestígio de substancialidade e sua natureza intrínseca é estabelecida por sua relação com os demais. Nessa dedução a teoria ordinal tem primazia sobre a cardinal. A fundamentação do número de uma maneira puramente lógica, feita por Dedekind, segundo Cassirer, é a melhor, pois trata de uma teoria mais simples, uma vez que, parte apenas da capacidade da mente humana de ligar uma coisa com outra (EPC: 100 Vol. IV). Isto é, em outras palavras, função. A “lei” específica que liga uma coisa à outra é o núcleo da função.

Como citado anteriormente, Cassirer usa o termo função importado da matemática, para descrever o comportamento de uma realidade que é formada de relações. Para vários filósofos, no mundo natural, há um primado do **devir** sobre o **ser**. Esses filósofos construíram seus sistemas tendo esse primado como premissa. Cassirer comunga com esta tendência e considera a substituição de substância por função inevitável. Se, em realidade não existem “coisas”, e sim “processos”, então a substância deve ceder lugar para a função. A base para essa mudança é o conceito relacional de número que é caracterizado pela posição que ocupa numa estrutura serial. Com o estabelecimento lógico do conceito de número, volta-se a lembrar a questão: Como pode o número, estabelecido puramente *a priori*, ter uma aplicação eficaz no mundo empírico? Ou, por outra, como se pode, com sucesso, e isso é um fato consumado, aplicar seus princípios ao mundo real? Como se viu anteriormente, a objetividade do conceito de número garante essa aplicação, pois o número é uma forma de cognição por excelência. Ele é um capítulo particular na teoria do conhecimento (EPC: 101 Vol. IV). E a

matemática é a ponte de ligação entre a lógica pura e os objetos empíricos. Assim, ela sai do seu domínio *a priori* puro para transformar-se na lógica matemática das ciências naturais exatas (FFS: 447).

Como ficou evidenciado, através do percurso que se fez na primeira parte de *Substance and function*, a construção dos conceitos nas ciências naturais exatas mostrou-se análoga ao mesmo processo na matemática. A análise do conceito de número e de espaço evidenciou a passagem da substância à função no contexto da aritmética e geometria. Essa análise não poderia contar com a lógica tradicional cujas estruturas não permitem rastrear o percurso exigido para a construção dos conceitos matemáticos. Como foi salientado, Cassirer aceita a inserção de conceitos matemáticos, tais como séries e limites dentro da lógica tradicional, tornando-a apta a respaldar a formação de conceitos nas ciências naturais exatas. A lógica assim ampliada e enriquecida não fica confinada apenas no campo da matemática, mas extravasa para as ciências naturais.

Cassirer, em sua exposição, mostrou que a física apesar de metodologicamente materialista, paradoxalmente, pressupõe o idealismo. O problema do ideal e do sensível é solucionado mediante a função transformadora da matemática que possibilitou quantificar fenômenos e, ao mesmo tempo, desvinculá-los de entidades ontológicos. O processo evolutivo da física atingiu seu ápice no conceito de energia, que se tornou “moeda de troca” entre os mais diferentes fenômenos naturais que ela aborda, e isto, de uma maneira precisa e quantitativa. Essa é segundo Cassirer, a forma adequada de estabelecer a ciência natural. A partir de uma física ideal, Cassirer chega à formação de conceitos na química moderna. A investigação de fenômenos químicos, diferentemente dos

físicos, parte de casos particulares. Porém, sob o aspecto lógico da matemática e de seu uso, essa investigação faz o mesmo percurso que se observou na física, e isto confirma a tese de Cassirer. A física e a química assim entendidas passam a dar conta da multiplicidade dos fenômenos naturais e estabelecem um conceito de ciência despida de qualquer vestígio de entidades ontológicas. Na abordagem tradicional os ganhos obtidos com o conceito de universal só serão atingidos através da perda de propriedades dos particulares. Esse processo exige uma opção exclusivista: ou se tem o universal ou o particular.

Na nova abordagem os elementos particulares são mantidos com os universais, e não se verifica a exclusão anterior, assim, são mantidos ganhos de uma e da outra opção. Com esse novo aparato de origem matemática verifica-se um radical redimensionamento no significado dos termos universal e particular na solução do problema do conhecimento.

Todas essas mudanças tiveram como ponto de partida a substituição do conceito de substância, que determinava a estrutura da lógica aristotélica, pelo conceito matemático de função. Dessa substituição resultou a inexistência de uma estrutura sistemática e fixa em ciência. Quando se muda a perspectiva lógica que suporta essa estrutura, a ciência também altera a estrutura que a estabelece. Cassirer usando a mudança de perspectiva que insere aspectos fundamentais da lógica matemática na lógica tradicional constatou que esse aparato construtivo de conceito aplicado nas ciências exatas naturais possibilita uma nova concepção de realidade. Para o autor, ficou assim plenamente justificada a ciência matemática da natureza. Cientistas modernos concordam com essa posição. Entre outros se pode citar Roland Omnès:

“Com a relatividade, a teoria do conhecimento cessou, sem dúvida para sempre, de se moldar na representação intuitiva, para se fundamentar apenas em conceitos cuja única formulação digna de fé passa a ser um formalismo matemático” (Omnès, 1996, p. 157).

O afastamento do conceito de substância e consequente reformulação da lógica tradicional tornaram-se um produtivo foco irradiador que reformula conceitos filosóficos e matemáticos. O resultado dessa reformulação tem conseqüências importantes para a teoria do conhecimento e permite uma nova abordagem no significado da relação entre o universal e o particular.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### Bibliografia Primária

**Cassirer, E.** *Substance and function*. Trad. W.C. Suabey e M.C. Suabey. New York: Dover Publication, Inc. 2003.

\_\_\_\_\_. *Einstein's theory of relativity considered from the epistemological standpoint*. Trad. W.C. Suabey e M.C. Suabey. New York: Dover Publication, Inc. 2003.

\_\_\_\_\_. *El problema del conocimiento en la filosofía y en la ciencia modernas*. Vol. I, II e IV. Trad. W. Roces, México: Fondo de Cultura Económica, 1953.

\_\_\_\_\_. *Determinism and indeterminism in modern physics*. Trad. O. T. Benfey. New Haven: Yale University Press, 1956

\_\_\_\_\_. *A filosofia das formas simbólicas: Vol. I: A linguagem*. Trad. M. Fleischer, São Paulo: Martins Fontes, 2001.

\_\_\_\_\_. *A filosofia das formas simbólicas: Vol. II: O pensamento mítico*, Trad.C. Cavalcanti, São Paulo: Martins Fontes, 2004 .

\_\_\_\_\_. *Filosofía de las formas simbólicas*. Vol. III: *Fenomenología del reconocimiento*. Trad. A. Morones, México: Fondo de Cultura Económica, 2003.

### Bibliografia Secundária

**Angioni, L.** *As noções aristotélicas de substância e essência*. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

**Aristóteles.** *Analíticos Posteriores*. Trad. E. Bini. São Paulo: Edipro, 2005.

\_\_\_\_\_. *Da interpretação*. Trad. E. Bini. São Paulo: Edipro, 2005.

\_\_\_\_\_. *Categorias*. Trad. E. Bini. São Paulo: Edipro, 2005.

\_\_\_\_\_. *Metafísica*. Trad. L. Vallandro. Porto Alegre: Editora Globo, 1969.

\_\_\_\_\_. *De Anima*. Trad. M. C. G. dos Rios. São Paulo: Editora 34 Ltda, 2007.

**Ávila, G.** *Análise matemática para licenciatura*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2006.

**Berkeley, G.** *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano*. In Col. Pensadores. Trad. A. Sérgio. São Paulo: Nova Cultural, 2005.

**Bunge, M.** *Física e filosofia*. Trad. G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva S. A., 2000.

**Boyer, C.** *Historia da matemática*. Trad. E. F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

**Barker, S. F.** *Filosofia da matemática*. Trad. L. Hengeberg e O. S. Mota. Rio de Janeiro: Zahar Ed, 1976.

**Blanché, R.** *História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell*. Trad. A. J. P. Ribeiro. Lisboa: Edições 70, s/d.

**Cohen, H.** *Logik der reinen erkenntnis*. In publicações Werke Vol VI. Olms: Hildeshein-New York. 1977.

**Davis, P. J. e Herh, R.** *A experiência matemática*. Trad. J. B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

**Dedekind, R.** *Que son y para que siervem los números*. Trad. e Intro. De J. Ferreiros. Madrid: Alianza Editorial S. A., 1998.

\_\_\_\_\_. *Essays on the theory of numbers*. Trad. W. W. Beman. New York: Dover Publications Inc. , 1963.

**Einstein, A.** *Sidelights on relativity*. New York: Dover Publication Inc. , 1983.

**Espinosa, B.** *Ética*. In Col. Pensadores. Trad. J. Carvalho, J. F. Gomes e A. Simões. São Paulo: Nova Cultura. 1997.

**Euclides.** *Os elementos*. Trad. I. Bicudo. São Paulo: Ed. Unesps, 2009.



**Eves, H.** *Introdução à história da matemática*. Trad. H. H. Domínguez. Campinas: Ed. Unicamp, 2004.

**Frege, G.** *Os fundamentos da aritmética e Sobre a justificação científica de uma conceitografia*. In Col. Pensadores. Trad. L. H. Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1989.

**Hamburg, C. H.** *Cassirer's conception of philosophy*. In *The philosophy of Ernst Cassirer*. New York: Tudor Publishing Co. , 1958.

**Hume, D.** *Tratado da natureza humana*. Trad. D. Danowski. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

**Kaufmann, F.** *Cassirer's theory of scientific knowledge*. In *The philosophy of Ernst Cassirer*. New York: Tudor Publishing Co. , 1958.

**Kant, I.** *Prolegômenos*, In Col. Pensadores. Vol. XXV. Trad. T. M. Bernkopf. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

\_\_\_\_\_. *Crítica da razão pura*, In Col. Pensadores. Trad. V. Rohden e U. B. Moosburge . São Paulo: Nova Cultural, 1999.

**Krois, J. M.** Cassirer, neo-kantianism in *Revue de Metaphisique et Morale*. Nº 4, 1992.

**Leibniz, G. W.** *Novos ensaios sobre o entendimento humano*. Trad. L.J. Baraúna. São Paulo: Nova Cultural, 2004.

**Locke, J.** *Ensaio acerca do entendimento humano*. Trad. A. Aiex. São Paulo: Nova Cultural, 1988.

**Maritain, J.** *Introdução geral à filosofia*. Trad. I. Neves e H. O. Penteado. Rio de Janeiro: Agir 1966

**Manno, A. G.** *A filosofia da matemática*. Trad. A. J. Rodrigues. Lisboa: Edições 70, s/d.

**Natorp, P.** Kant und die Marburger Schule. *Kant-Studien*, Vol. XVIII, 1912.

**Omnés, R.** *Filosofia da ciência contemporânea*. Trad. R. L. Ferreira. São Paulo: Unesp, 1996.

**Porta, M. A. G.** *A filosofia a partir de seus problemas*. São Paulo: Edições Loyola, 2004.

**Reale, G.** *Aristóteles Metafísica*. Vol. I. Trad. M. Perine. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

**Russell, B.** *Introdução à filosofia matemática*. Trad. G. Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

\_\_\_\_\_. *The principles of mathematics*. Londres, Allen & Unwim, 1996.

\_\_\_\_\_. *Meu pensamento filosófico*. Trad. B. Silveira. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1960.

\_\_\_\_\_. *ABC da relatividade*. Trad. M. L. X. A. Borges. Rio de Janeiro: J. Zahar Editor, 2005.

\_\_\_\_\_. *História da filosofia ocidental*. Vols. I e III. Trad. B. Silveira. São Paulo: Editora Nacional, 1969.

**Schopenhauer, A.** *O mundo como vontade e como representação*. Trad. Jair Barboza. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

**Smart, H. R.** *Cassirer's theory of mathematical concepts*. In *The philosophy of Ernst Cassirer*. New York: Tudor Publishing Co. , 1958.

**Swabey, W. C.** *Cassirer and metaphysic*, In *The philosophy of Ernst Cassirer*. New York: Tudor Publishing Co. , 1958.

**Stephens, I. K.** *Cassirer's doctrine of the a priori*. In *The philosophy of Ernst Cassirer*. New York: Tudor Publishing Co. , 1958.

**Tiles, M.** *The philosophy of set theory*. New York: Dover Publication Inc. , 1989.

**Silva, J. J.** *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora Unesp, 2007.